คณิตศาสตร์ดิสครีต

DISCRETE MATHEMATICS

ผศ.จีรวุธ มุนินทร์นพมาศ

ฟังก์ชัน (Function)

1. ฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่สมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.1 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1) $r_1 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$

2) $r_2 = \{(1, -1), (1, 1), (2, 4)\}$

3) $r_3 = \{(2, 0), (4, 0), (6, 0)\}$

วิธีทำ

r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

แต่ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันเนื่องจาก เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y = -1$ และ $y = 1$

หรือ $x = 1$ จับคู่กับ ค่า y ได้สองค่า คือ $y = -1$ และ $y = 1$

ตัวอย่าง 1.2

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

วิธีทำ

1) $r_1 = \{(x, y) \mid y = 2\}$ **เป็นฟังก์ชัน**

2) $r_2 = \{(x, y) \mid x = 3\}$ **ไม่เป็นฟังก์ชัน**

3) $r_3 = \{(x, y) \mid x = y^2 + 1\}$ **ไม่เป็นฟังก์ชัน**

4) $r_4 = \{(x, y) \mid x^2 = y - 1\}$ **เป็นฟังก์ชัน**

5) $r_5 = \{(x, y) \mid x = |y|\}$ **ไม่เป็นฟังก์ชัน**

6) $r_6 = \{(x, y) \mid y = |x| + 1\}$ **เป็นฟังก์ชัน**

7) $r_7 = \{(x, y) \mid x = \dfrac{y+1}{2}\}$ **เป็นฟังก์ชัน**

จาก $r_2 = \{(x, y) \mid x = 3\}$ หมายความว่า
ไม่ว่า y จะมีค่าเท่าใด x ก็จะมีค่าเท่ากับ 3
เช่น (3, -1), (3, 0), (3, 1)
ดังนั้น r_2 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

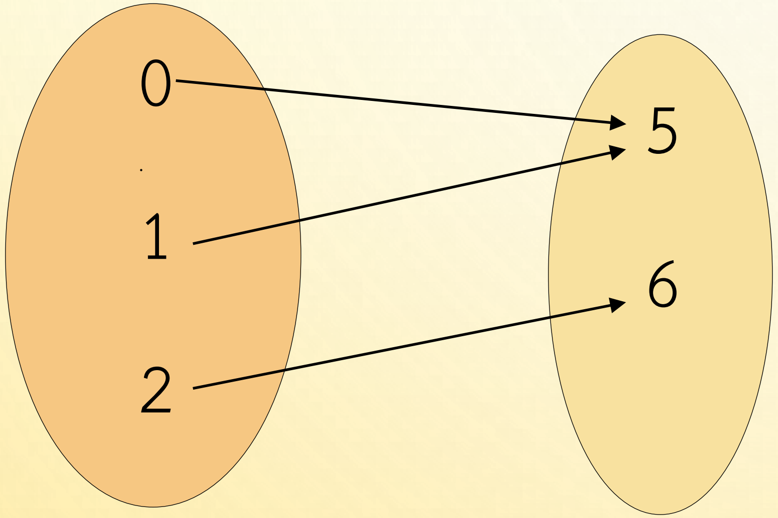
จาก $r_3 = \{(x, y) \mid x = y^2 + 1\}$
เช่น (2, -1), และ (2, 1)
ดังนั้น r_3 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

จาก $r_5 = \{(x, y) \mid x = |y|\}$ จะพบว่า
ถ้า $y = -1$ และ $y = 1$ จะได้ $x = 1$
หรือ $x = 1$ จับคู่กับค่า y ได้สองค่า
คือ (1, 1) และ (1, -1)
ดังนั้น r_5 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

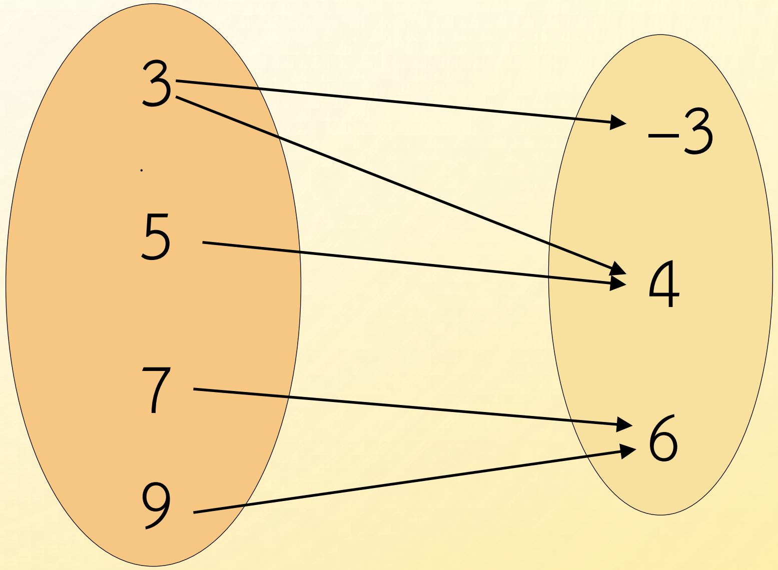
ตัวอย่าง 1.3 จงพิจารณาแผนภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

วิธีทำ

r_1



r_2



จากแผนภาพจะได้ว่า r_1 เป็นฟังก์ชัน แต่ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก $x = 3$ จับคู่กับค่า y ได้สองค่า คือ $y = -3$ และ $y = 4$

2. รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน

การเขียนฟังก์ชันมีหลายรูปแบบ แต่รูปแบบที่พบบ่อย ๆ มี 5 รูปแบบ ดังนี้

รูปแบบที่ 1 การเขียนฟังก์ชันโดยใช้แผนภาพ รูปแบบนี้เป็นการนำฟังก์ชันในรูปการแจกแจงสมาชิกมาเขียนให้เห็นชัดเจนว่าคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของ f แต่ละสมาชิกเกิดจากการจับคู่กันอย่างไร

1)

$2 \longrightarrow 1$

$4 \longrightarrow 3$

$6 \longrightarrow 5$

$8 \longrightarrow 7$

2)

ก $\longrightarrow$ 1

ข $\longrightarrow$ 2

ค $\longrightarrow$ 2

2. รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน (ต่อ)

รูปแบบที่ 2 การเขียนฟังก์ชันโดยการแจกแจงสมาชิก รูปแบบนี้เป็นการเขียนฟังกัน f ในรูปเซต และเขียนสมาชิกแต่ละตัวของ f ซึ่งเป็นคู่อันดับลงในเซต เช่น

$f = \{(1, 4), (2, 6), (3, 8), (4, 10)\}$

2. รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน (ต่อ)

รูปแบบที่ 3 การเขียนฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต รูปแบบนี้เกิดจากการเขียนฟังก์ชันในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขโดยใช้คู่อันดับ (x, y) แทนสมาชิกใด ๆ ในเซต f แล้วมีเงื่อนไขบอกให้ทราบว่า x กับ y จับคู่กันด้วยกฎเกณฑ์ใด เช่น $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x\}$

ในตัวอย่างนี้ f เป็นเซต มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (x, y) ใด ๆ โดยที่ x กับ y จับคู่กันโดยใช้กฎเกณฑ์ (หรือเงื่อนไข) ว่า $y = 3x$

การเขียนฟังก์ชันแบบนี้ นิยมเขียนเฉพาะกฎเกณฑ์ (เงื่อนไข) ที่ x กับ y จับคู่กัน แทนการเขียนเซต f เช่น

$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x\}$ นิยมเขียนเป็น $y = 3x$

$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 4x - 6\}$ นิยมเขียนเป็น $y = x^2 - 4x - 6$

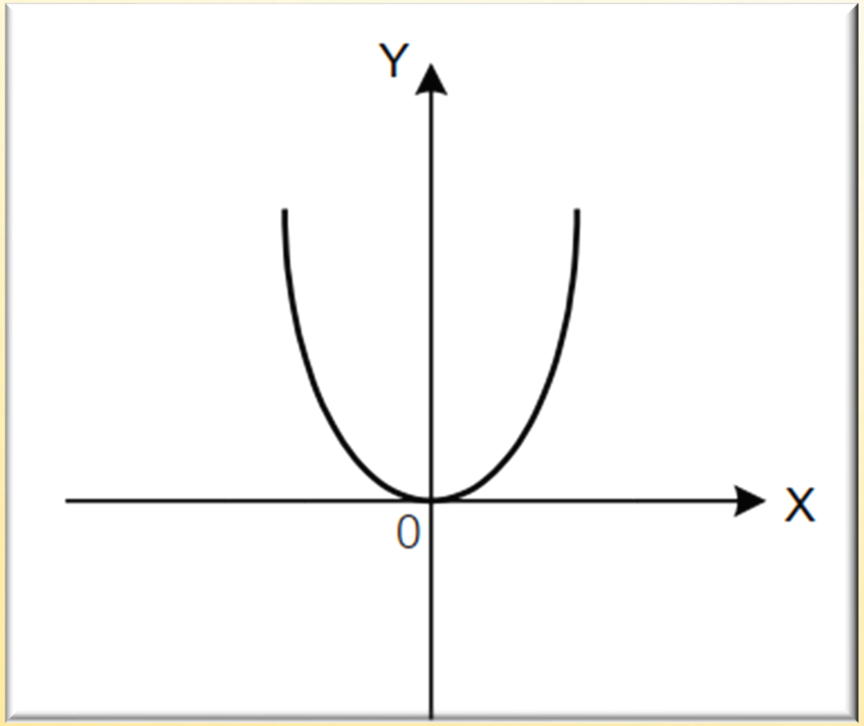
2. รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน (ต่อ)

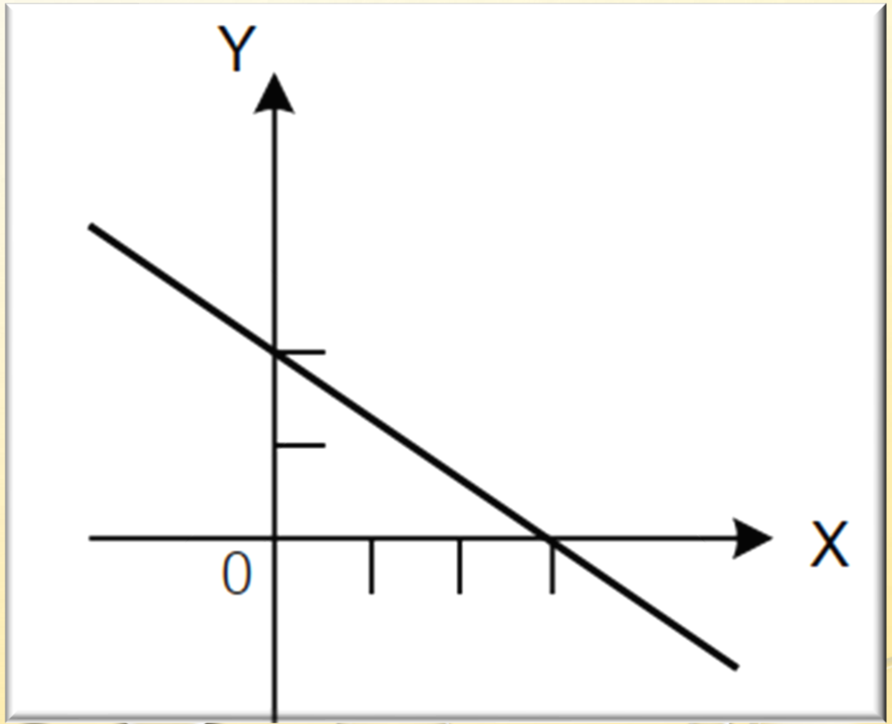
รูปแบบที่ 4 การเขียนฟังก์ชันโดยการใช้ตาราง รูปแบบนี้เป็นการนำคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของ f แต่ละสมาชิกเขียนไว้ในตาราง เช่น

x	1	2	3	4
y	12	24	36	48

2. รูปแบบการเขียนฟังก์ชัน (ต่อ)

รูปแบบที่ 5 การเขียนฟังก์ชันโดยใช้กราฟ รูปแบบนี้เกิดจากการนำคู่อันดับ (x, y) ที่อยู่ใน f ไปเขียนเป็นจุดบนระนาบ ซึ่งจะได้เซตของจุดมากมายที่เห็นเป็นรูปกราฟแบบต่าง ๆ เช่น

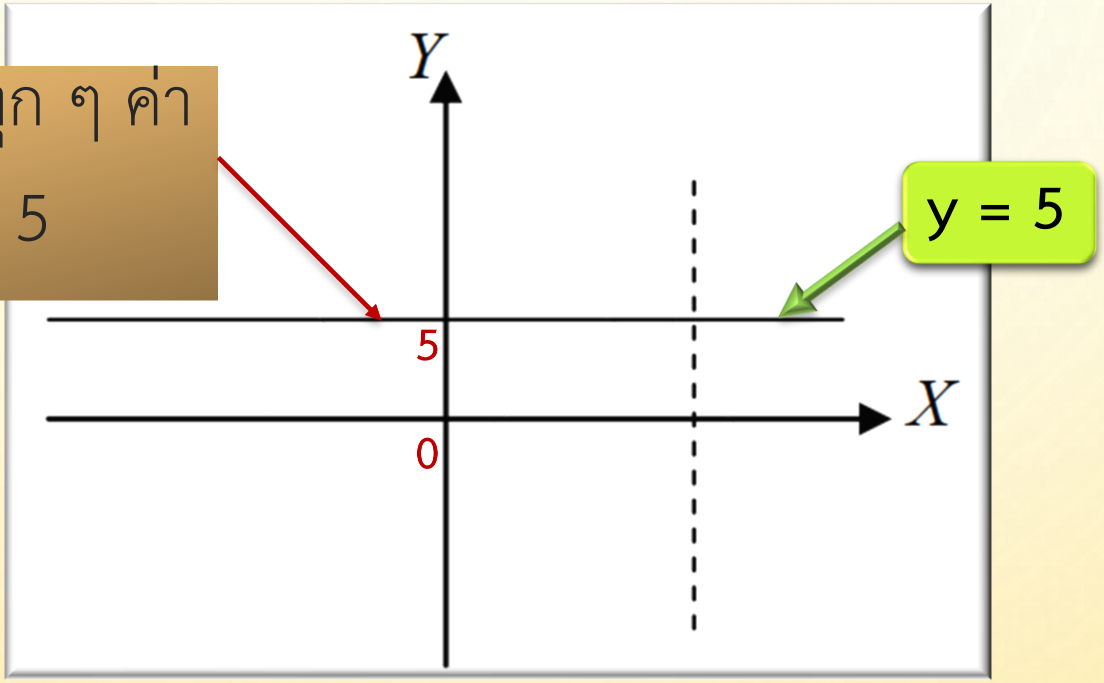




ตัวอย่าง 2.1 จงพิจารณาว่า $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 5\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยใช้กราฟ

วิธีทำ

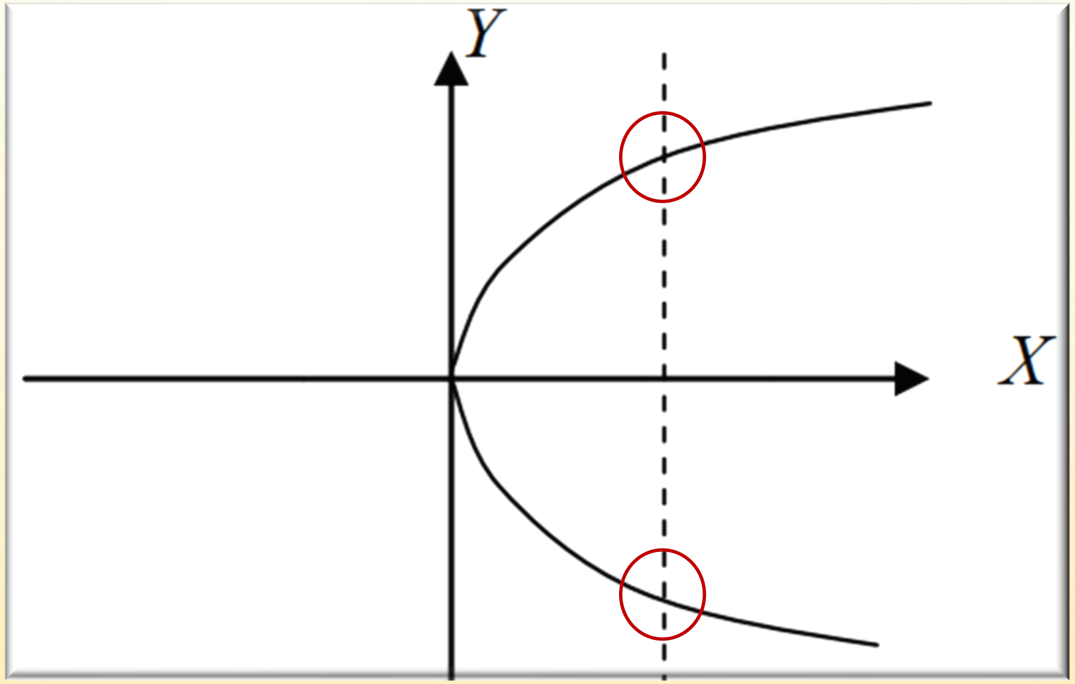
สมการ $y = 5$ หมายความว่า ทุก ๆ ค่า ของ x จะจับคู่กับ y ที่มีค่าเป็น 5



จากกราฟเราจะเห็นว่าไม่มีเส้นขนานกับแกน Y เส้นใดตัดกราฟของความสัมพันธ์ f มากกว่า 1 จุด ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 2.2 จงพิจารณาว่า $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = x\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยใช้กราฟ

วิธีทำ



จากกราฟเราจะเห็นว่ามีเส้นขนานกับแกน Y ตัดกราฟของความสัมพันธ์ r มากกว่า 1 จุด ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน

การเขียนสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันนอกจากการเขียนในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไขแล้ว ยังสามารถเขียนเฉพาะสมการหรืออสมการที่บรรยายลักษณะของฟังก์ชันโดยการกำหนด y ในพจน์ของ x หรือถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้วจะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และเรียก $f(x)$ ว่า ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ($f(x)$ อ่านว่า เอฟของเอ็กซ์ หรือ เอฟเอ็กซ์)

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid y = x + 3\}$

เราสามารถเขียนแทนด้วย $f(x) = x + 3$ หรือ $y = x + 3$

หลังจากกำหนดฟังก์ชันแล้ว จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันได้เมื่อกำหนดค่าของ x ในโดเมนของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ $f(x) = -3x + 4$ จงหาค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 0$ และ $x = 2$

วิธีทำ

$$f(0) = -3(0) + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$f(2) = -3(2) + 4 = -6 + 4 = -2$$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - x - 1$ จงหาค่าของ $f(-1), f(5)$

วิธีทำ

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$f(5) = (5)^2 - 5 - 1 = 25 - 5 - 1 = 19$$

ในกรณีที่ไม่ได้กำหนดโดเมนของฟังก์ชันมาให้ จะถือว่าโดเมนของฟังก์ชันเป็น**เซตของจำนวนจริง** หรือ สับเซตของจำนวนจริง และถ้ากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน หมายถึง **ฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง**

4. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

บทนิยาม

โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าในคู่อันดับของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย D_f

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของสมาชิกตัวหลังในคู่อันดับของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย R_f

ตัวอย่าง 4.1 กำหนด $f = \{(2, 7), (4, 9), (6, 11), (8, 13)\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ

จาก $f = \{(2, 7), (4, 9), (6, 11), (8, 13)\}$

จะได้ $D_f = \{2, 4, 6, 8\}$

$R_f = \{7, 9, 11, 13\}$

การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

1. **การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน** เมื่อกำหนดฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จะอาศัยบทนิยามดังตัวอย่างที่ 4.1

2. **การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน** เมื่อกำหนดฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไข สามารถหาได้ดังนี้

การหาโดเมน

การหาโดเมนเพื่อความสะดวกเราควรเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของ **y = พจน์ของ x** เช่น

$y = x^2 + 1$, $y = \frac{x+1}{x+2}$ เป็นต้น

หลังจากนั้นให้พิจารณาดูว่าภายในเซตที่กำหนดให้นั้น มีค่า x อะไรได้บ้างที่ทำให้หาค่า y ได้ โดยที่ y นั้นต้องอยู่ภายในเซตที่กำหนดให้ **ค่า x เหล่านั้นจะเป็นสมาชิกของโดเมน**

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$ จงหาโดเมนของ f

วิธีทำ

จาก $y = 2x + 1$

พบว่าทุก ๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริงจะสามารถหาค่าของ y ที่เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับ f ได้เสมอ

$\therefore D_f = \{x \mid x \in R\}$

$D_f = R$

การหาเรนจ์

การหาเรนจ์มีหลักการเช่นเดียวกับการหาโดเมน ต่างกันที่ว่าแทนที่เราจะหาค่า x ก็เปลี่ยนมาเป็นค่า y และพิจารณาว่า y มีค่าเป็นอะไรได้บ้างที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนั้นจึงควรเขียนเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูป **x = พจน์ของ y** แล้วพิจารณาค่า y โดยใช้หลักการเช่นเดียวกับการหาโดเมน

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$ จงหาเรนจ์ของ f

วิธีทำ

จาก $y = 2x + 1$

$2x = y - 1$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

แล้วพิจารณาค่า y จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ y ที่เป็นจริงสามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับสมการดังกล่าวได้เสมอ

$\therefore R_f = \{y \mid y \in R\}$

$R_f = R$

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 4 - x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

วิธีทำ **<u>หาโดเมน</u>**

จาก $y = 4 - x^2$ พบว่าทุก ๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริงจะสามารถหาค่าของ y ที่เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับ f ได้เสมอ $\therefore D_f = \{x \mid x \in R\} = R$

<u>หาเรนจ์</u>

จาก $y = 4 - x^2$ เขียนให้อยู่ในรูป x = พจน์ของ y ได้ดังนี้

$x^2 = 4 - y$

$x = \pm\sqrt{4-y}$

$\therefore R_f = \{y \mid y \in R$ และ $y < 5\}$ (เพราะถ้า y มีค่ามากกว่า 5 จะทำให้ $\sqrt{4-y} < 0$)

การเท่ากันของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน, f = g ก็ต่อเมื่อ $D_f = D_g$ และ $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D_f$

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 3\}$ และ

$g = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ \mid y = x^2 + 3\}$

จงหาว่า f เท่ากับ g หรือไม่

วิธีทำ

เนื่องจาก $D_f = R$ แต่ $D_g = I^+$

ดังนั้น $D_f \neq D_g$

$\therefore f \neq g$

จาก $y = x^2 + 3$ เขียนให้อยู่ในรูป x = พจน์ของ y ได้ดังนี้

$x^2 = y - 3$

$x = \pm\sqrt{y-3}$

$y - 3 >= 0$

$\therefore y >= 3$

$\therefore R_f = \{y \mid y \in R$ และ $y >= 3\}$

การเท่ากันของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.6 กำหนดให้ f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$ และ g(x) = x + 3 จงพิจารณาว่า f = g หรือไม่

วิธีทำ

จาก f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$ จะได้ว่า $D_f = R - \{3\}$

และจาก g(x) = x + 3 จะได้ว่า $D_g = R$

เพราะว่า $D_f \neq D_g$

ดังนั้น มี x = 3 ที่ทำให้ f(x) ≠ g(x)

นั่นคือ **f ≠ g**

5. ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A to B)

บทนิยาม

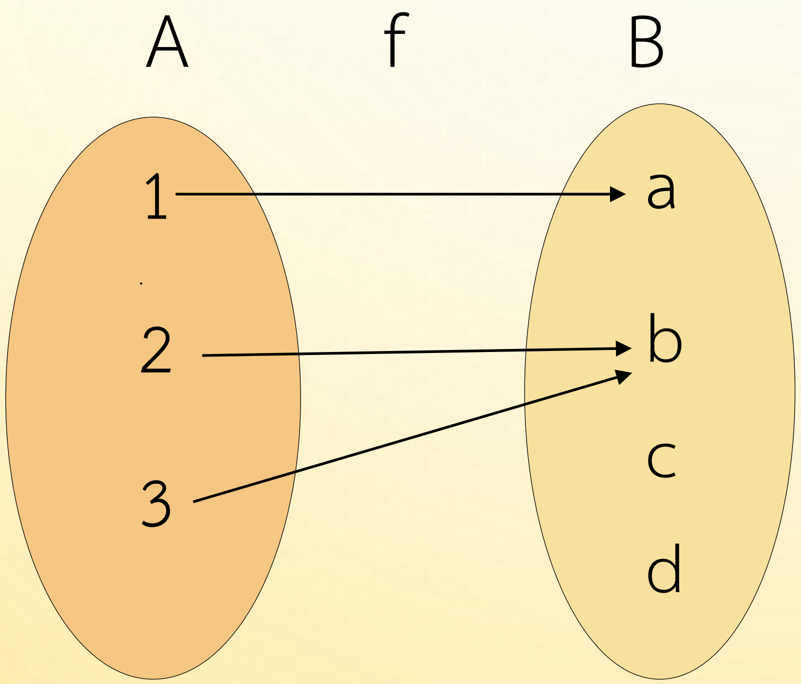
กำหนดให้ A และ B เป็นเซต, f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A to B) ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. $D_f = A$ ⇒ แสดงว่า D_f ต้องประกอบด้วยสมาชิกทุกตัวในเซต A
3. $R_f \subset B$ ⇒ แสดงว่า R_f ไม่จำเป็นต้องประกอบด้วยสมาชิกทุกตัวในเซต B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \longrightarrow B$

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้ A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c, d} และกำหนดฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

วิธีทำ



$D_f = \{1, 2, 3\} = A$ และ

$R_f = \{a, b\} \subset B$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

6. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)

บทนิยาม

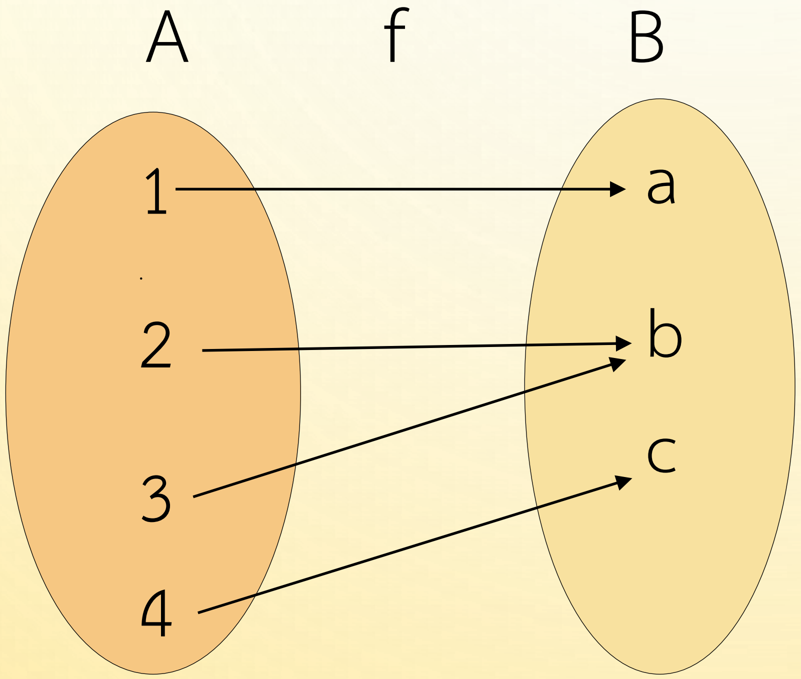
กำหนดให้ A และ B เป็นเซต, f เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปทั่วถึง** B (function from A onto B) ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. $D_f = A$ ⇒ แสดงว่า **D_f ต้องประกอบด้วยสมาชิกทุกตัวในเซต A**
3. $R_f = B$ ⇒ แสดงว่า **R_f ต้องประกอบด้วยสมาชิกทุกตัวในเซต B**

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow{\text{ไปทั่วถึง}} B$

ตัวอย่าง 6.1 กำหนดให้ A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c} และกำหนดฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

วิธีทำ



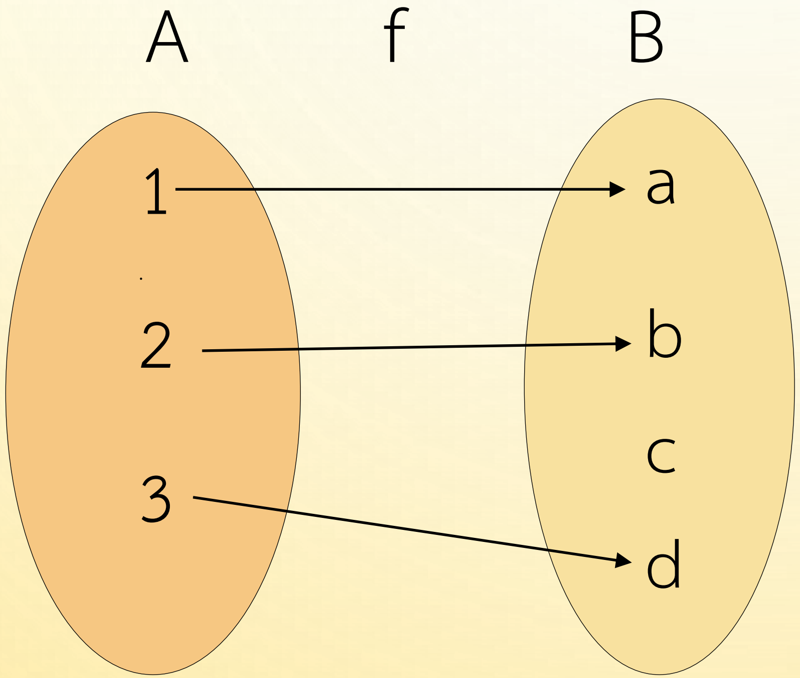
$D_f = \{1, 2, 3, 4\} = A$ และ

$R_f = \{a, b, c\} = B$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่าง 6.2 กำหนดให้ A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c, d} และกำหนดฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่

วิธีทำ



$D_f = \{1, 2, 3\} = A$ และ

$R_f = \{a, b, d\} \subset B$

เนื่องจากมี $c \in B$ ที่ $c \notin R_f$ นั่นคือ f **ไม่เป็น**ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

7. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม

ให้ A และ B เป็นเซต, f : A $\longrightarrow$ B แล้ว f เรียกว่า ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one) จาก A ไป B แทนด้วย f : $\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{1-1}} \mathbf{B}$

ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

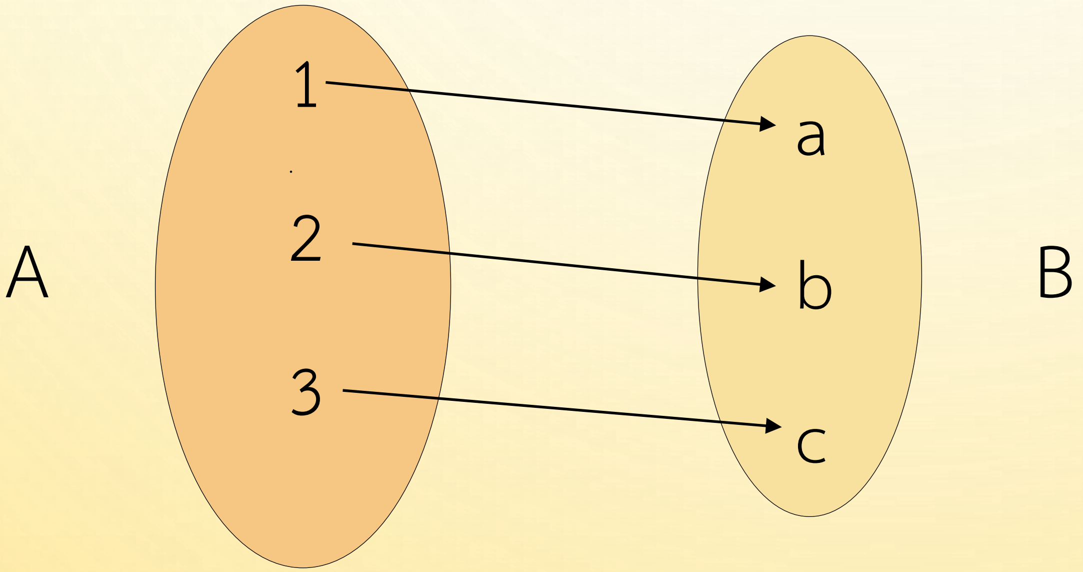
หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า

ถ้า $y_1 = y_2$ แล้ว $x_1 = x_2$

ตัวอย่าง 7.1 กำหนดให้ A = {1, 2, 3} B = {a, b, c} และ f = {(1, a), (2, b), (3, c)}

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จาก f = {(1, a), (2, b), (3, c)} สามารถเขียนแผนภาพได้เป็น



จะพบว่าแต่ละสมาชิกในเซต A จับคู่กับแต่ละสมาชิกในเซต B เพียงแค่ตัวเดียว

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

วิธีการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 1

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต f : A $\longrightarrow$ B

วิธีการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งให้เขียน **x ในรูปพจน์ของ y**

1. ถ้าแต่ละสมาชิก y ใน R_f **ให้ค่า x เพียงค่าเดียว**แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. ถ้ามี y $\in$ R_f ซึ่งให้ค่า x เกินกว่า 1 ค่าแล้ว f จะไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 7.2 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid x + y + 1 = 0\}$ จงแสดงว่า $f : R \xrightarrow{1-1} R$

วิธีทำ

(1) จะแสดงว่า $f: R \longrightarrow R$

จากสมการ $x + y + 1 = 0$

จะได้ว่า $y = -x - 1$

จะพบว่า $x \in R$ และสามารถหาค่า $y \in R$ ได้เสมอและได้เพียงแค่ค่าเดียว

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันโดยที่ $D_f = R$, $R_f \subset R$

ดังนั้น **f เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R**

(2) จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง

เขียน x ในรูปพจน์ของ y

จากสมการ $x + y + 1 = 0$

จะได้ว่า $\boxed{x = -1 - y}$

จะพบว่า $y \in R_f$ และสามารถหาค่า $x \in R$ ได้เสมอและได้เพียงแค่ค่าเดียว

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากข้อ (1) และ (2) สรุปได้ว่า **$f: R \xrightarrow{1-1} R$**

วิธีการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ต่อ)

วิธีที่ 2

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (x, y)

สมมติให้ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$

1. ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า $x_1 = x_2$ แล้ว **f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**

2. ถ้า x_1 และ x_2 เป็นไปได้ที่จะไม่เท่ากันแล้ว f จะไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 7.3 จงพิจารณาว่า f(x) = $\sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ จาก f(x) = $\sqrt{x}$ จะได้ $f(x_1) = \sqrt{x_1}$ และ $f(x_2) = \sqrt{x_2}$

สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ f(x) = $\sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 7.4 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid 4x + 3y - 5 = 0\}$ จงแสดงว่า $f : R \xrightarrow{1-1} R$

วิธีทำ ให้ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$

จะได้ว่า $4x_1 + 3y - 5 = 0$

และ $4x_2 + 3y - 5 = 0$

สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$

ดังนั้น $4x_1 + 3y - 5 = 4x_2 + 3y - 5$

$$4x_1 = 4x_2$$

$$x_1 = x_2$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 7.5 จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 + 3x + 2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^2 + 3x + 2$

จะได้ $f(x_1) = x_1^2 + 3x_1 + 2$

และ $f(x_2) = x_2^2 + 3x_2 + 2$

สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $x_1^2 + 3x_1 + 2 = x_2^2 + 3x_2 + 2$

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 3x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 3(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3) = 0$$

ดังนั้น $x_1 - x_2 = 0$ หรือ $x_1 + x_2 + 3 = 0$

สำหรับ $x_1 - x_2 = 0$ จะได้ว่า $\mathbf{x_1 = x_2}$

พิจารณา $x_1 + x_2 + 3 = 0$ จะได้ว่า

$$\mathbf{x_1 = -x_2 + 3}$$

ดังนั้น $\mathbf{x_1 \neq x_2}$

นั่นคือ $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ต่อ)

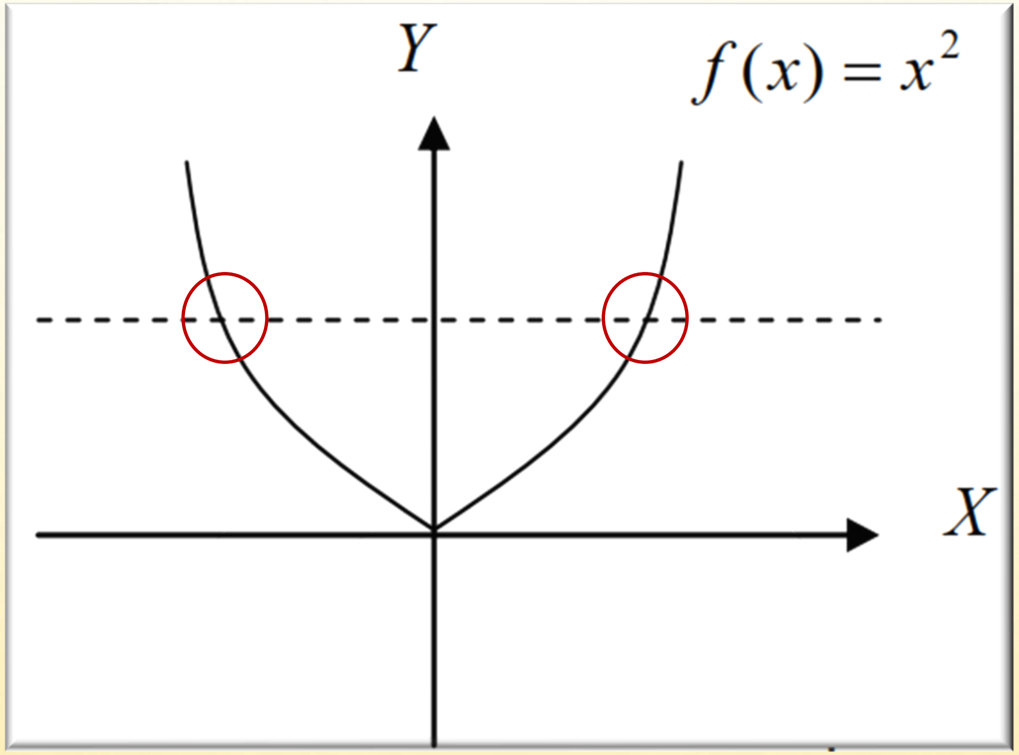
วิธีที่ 3 โดยการเขียนกราฟ

ในกรณีที่สามารถวาดกราฟของฟังก์ชัน f ได้ การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งอาจพิจารณาจากกราฟได้ **โดยการลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน x และให้ตัดกราฟของ f**

1. ถ้าเส้นตรงทุกเส้น**ตัดกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น** f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. ถ้ามีเส้นตรงบางเส้นตัดกราฟของ f มากกว่าหนึ่งจุดแล้ว f จะไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 7.6 จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ



จากกราฟจะพบว่ามีเส้นขนานกับแกน x ที่ตัดกราฟของฟังก์ชัน f มากกว่า 1 จุด
ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

8. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

บทนิยาม

ให้ A และ B เป็นเซต, f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one to one) เป็นการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) แทนด้วย

$f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ

1. **f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**
2. $D_f = A$
3. $R_f = B$

ตัวอย่าง 8.1

กำหนดให้ f = $\{(x, y) \in R \times R \mid y^3 = x\}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก R ไป R

วิธีทำ

(1) **จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน**

จากสมการ $y^3 = x$

จะได้ว่า $y = \sqrt[3]{x}$

จะพบว่าแต่ละ x ในโดเมนจะสามารถหาค่า y ได้เพียงแค่ค่าเดียวเท่านั้น

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R

(2) **จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**

ให้ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$

จะได้ว่า $y^3 = x_1$ และ $y^3 = x_2$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 8.1 (ต่อ)

(3) **หาโดเมนของ f**

จากสมการ $y^3 = x$

จะได้ว่า $y = \sqrt[3]{x}$

จะพบว่าแต่ละ $x \in R$ จะสามารถหาค่า y ได้เสมอ

ดังนั้น $D_f = R$

(4) **หาเรนจ์ของ f**

จากสมการ $x = y^3$

จะพบว่าถ้า $y \in R$ จะสามารถหาค่า x ได้เสมอ

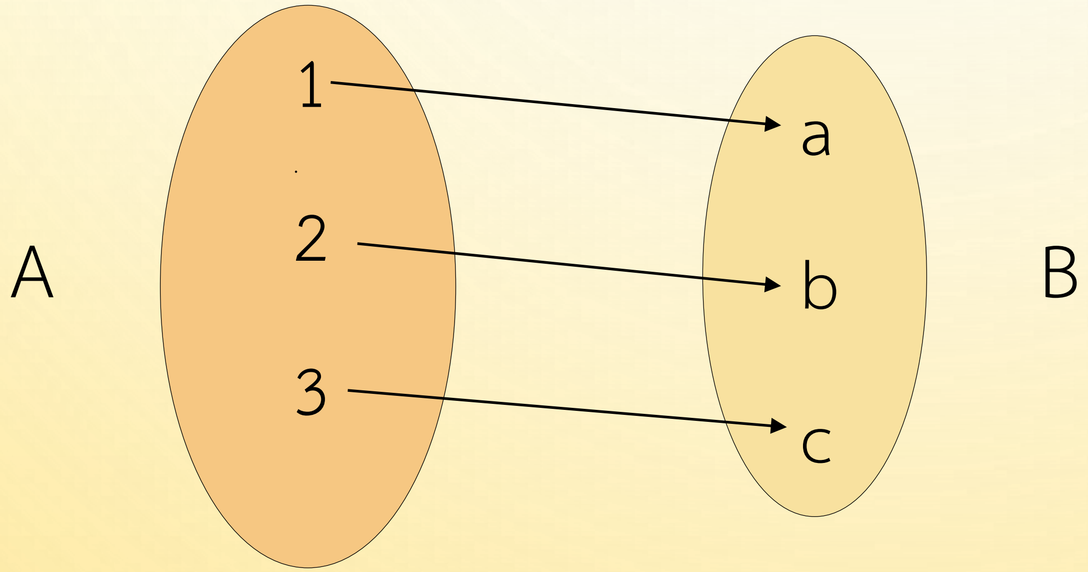
ดังนั้น $R_f = R$

จากข้อ (1) – (4) สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก R ไป R

ตัวอย่าง 8.2 กำหนดให้ A = {1, 2, 3} B = {a, b, c} และ f = {(1, a), (2, b), (3, c)}

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จาก f = {(1, a), (2, b), (3, c)} สามารถเขียนแผนภาพได้เป็น



1. จะพบว่าแต่ละสมาชิกในเซต A จับคู่กับแต่ละสมาชิกในเซต B เพียงแค่ตัวเดียว
2. ทุก ๆ สมาชิกในเซต B ถูกจับคู่

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก A ไป B

9. ฟังก์ชันผกผัน

จากการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์ทำให้ทราบว่า เมื่อมีความสัมพันธ์ก็จะมีอินเวอร์สของความสัมพันธ์ และเนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นฟังก์ชันจึงมีอินเวอร์สของฟังก์ชันซึ่งเรียกว่า **ฟังก์ชันผกผัน** หรือ **ฟังก์ชันอินเวอร์ส**

กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ แล้ว **ฟังก์ชันอินเวอร์ส** คือ $f^{-1}: B \rightarrow A$ แทนด้วย f^{-1}

f^{-1} จะไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A ถ้ามีลักษณะต่อไปนี้

1. $D_{f^{-1}} \neq B$ หรือ $R_{f^{-1}} \neq B$ หรือ f ไปไม่ทั่วถึง B
2. f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม

ถ้า $f: A \xrightarrow[onto]{1-1} B$ แล้ว อินเวอร์สของความสัมพันธ์ f^{-1} จาก B ไป A จะเรียกว่า**ฟังก์ชันอินเวอร์สของ** f (inverse of f)

ตัวอย่าง 9.1 กำหนดให้ A = {1,2,3,4}, B = {a,b,c,d} และ f = {(1,a), (2,b), (3,c), (4,d)} จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ

จาก $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$

ดังนั้น f^{-1} ฟังก์ชันอินเวอร์ส

ตัวอย่าง 9.2 กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$ และ $f = \{(1,a), (2,c), (3,e), (4,a)\}$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ

จาก $f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (4, a)\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(a, 1), (c, 2), (e, 3), (a, 4)\}$

เพราะว่า $(a, 1) \in f^{-1}$ และ $(a, 4) \in f^{-1}$ แต่ $1 \neq 4$

ดังนั้น f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 9.3 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f หรือไม่

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^2$

จะได้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2\}$

ให้ $(x_1, y_1) \in f^{-1}$ และ $(x_1, y_2) \in f^{-1}$

จะได้ $x_1 = y_1^2$ และ $x_1 = y_2^2$

ดังนั้น $y_1^2 = y_2^2$ แต่ $\boxed{y_1 \neq y_2}$ แสดงว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน (เพราะ x_1 ต้องจับคู่กับ y เพียงแค่ตัวเดียว) แสดงว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันผกผันของ f

เช่น $2^2 = (-2)^2$ แต่ $2 \neq -2$

ข้อสังเกต ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สก็ต่อเมื่อ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน
2. อินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 9.4 กำหนดให้ $f(x) = 3x + 1$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = 3x + 1$

จะได้ว่า $y = 3x + 1$

สลับตัวแปร โดยเปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x

จะได้ $x = 3y + 1$

$$y = \frac{x-1}{3}$$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

ตัวอย่าง 9.5 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3+2}{3}$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = \frac{x^3+2}{3}$

จะได้ว่า $y = \frac{x^3+2}{3}$

สลับตัวแปร โดยเปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x

จะได้ $x = \frac{y^3+2}{3}$

$y = \sqrt[3]{3x-2}$ ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3x-2}$

10. พีชคณิตของฟังก์ชัน

ในกรณีที่ 2 ฟังก์ชันใด ๆ มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริงแล้วก็จะสามารถนำฟังก์ชันทั้งสองมาบวก ลบ คูณ และหารกันได้โดยใช้นิยามต่อไปนี้

บทนิยาม

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง

$$f+g =\{(x,y) \mid y=f(x)+g(x) \wedge x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f-g =\{(x,y) \mid y=f(x)-g(x) \wedge x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f \cdot g =\{(x,y) \mid y=f(x)\cdot g(x) \wedge x \in D_f \cap D_g\}$$

$$\frac{f}{g} =\{(x,y) \mid y=\frac{f(x)}{g(x)} \wedge x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\}$$

ตัวอย่าง 10.1

กำหนดให้ $f = \{(1, 3), (2, 7), (3, 9), (5, 10)\}$ และ $g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 0), (4, 2)\}$

จงหา $f + g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ

$D_f = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$

$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 3 + 3 = 6$

$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 7 + 5 = 12$

$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 9 + 0 = 9$

ดังนั้น $f + g = \{(1, 6), (2, 12), (3, 9)\}$

ตัวอย่าง 10.1 (ต่อ)

กำหนดให้ $f = \{(1, 3), (2, 7), (3, 9), (5, 10)\}$ และ $g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 0), (4, 2)\}$

จงหา $f + g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ

$D_f = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

$D_{fg} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$

$(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 3 \cdot 3 = 9$

$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 7 \cdot 5 = 35$

$(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 9 \cdot 0 = 0$

ดังนั้น $f \cdot g = \{(1, 9), (2, 35), (3, 0)\}$

ตัวอย่าง 10.1 (ต่อ)

กำหนดให้ f = {(1, 3), (2, 7), (3, 9), (5, 10)} และ g = {(1, 3), (2, 5), (3, 0), (4, 2)}

จงหา $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ และ $\frac{g}{f}$ พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ

$D_f = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x \mid x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\} = \{1, 2\}$

$\frac{g}{f} = \{(1, 1), (2, \frac{5}{7}), (3, 0)\}$

$(\frac{f}{g})(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{3}{3} = 1$

$(\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{7}{5}$

$(\frac{f}{g})(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{9}{0}$ = หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $\frac{f}{g} = \{(1, 1), (2, \frac{7}{5})\}$

$(f \cdot f)(x) = 25x^2 + 20x + 4,\ (f \cdot f)(2) = 184$

ตัวอย่าง10.2 กำหนดให้ $f(x) = 5x + 2$ และ $g(x) = x^2$ จงหา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(f + g)(2)$, $(f - g)(2)$, $(f \cdot g)(2)$ และ $(\frac{f}{g})(2)$ ตามลำดับ

วิธีทำ

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 5x + 2 + x^2 = x^2 + 5x + 2$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 5x + 2 - x^2 = -x^2 + 5x + 2$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (5x + 2)(x^2) = 5x^3 + 2x^2$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x + 2}{x^2},\ x \neq 0$$

$(f + g)(2) = 16$

$(f - g)(2) = 8$

$(f \cdot g)(2) = 48$

$(\frac{f}{g})(2) = 3$

ตัวอย่าง 10.3

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x , & x \leq 2 \\ x^2 , & x > 2 \end{cases}$$

1. จงหา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ และ $(\frac{f}{g})(x)$ ตามลำดับ
2. จงหา $(f + g)(-1)$, $(f + g)(0)$ และ $(f + g)(5)$
3. จงหา $(f - g)(-1)$, $(f - g)(0)$ และ $(f - g)(5)$
4. จงหา $(f \cdot g)(-1)$, $(f \cdot g)(0)$ และ $(f \cdot g)(5)$
5. จงหา $(\frac{f}{g})(-1)$, $(\frac{f}{g})(2)$ และ $(\frac{f}{g})(5)$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

วิธีทำ แบ่งโดเมนของ g(x) ออกเป็นเซตย่อยให้สอดคล้องกับโดเมนของ f(x) ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ 3x, & x = 0 \\ 3x, & 0 < x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x\ , & x < 0 \\ 3x\ , & x = 0 \\ 3x\ , & 0 < x \le 2 \\ x^2\ , & x > 2 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x & , x < 0 \\ 3x + 2 & , x = 0 \\ 5x + 1 & , 0 < x \le 2 \\ x^2 + 2x + 1 & , x > 2 \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3x & , x < 0 \\ 2 - 3x & , x = 0 \\ -x + 1 & , 0 < x \le 2 \\ 2x + 1 - x^2 & , x > 2 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x\ , & x < 0 \\ 3x\ , & x = 0 \\ 3x\ , & 0 < x \le 2 \\ x^2\ , & x > 2 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 9x^3 & , \quad x < 0 \\ 6x & , \quad x = 0 \\ 6x^2 + 3x & , \quad 0 < x \le 2 \\ 2x^3 + x^2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{3x} \rightarrow x & , \ x < 0 \\ \cancel{\frac{2}{3x}} & , \ x = 0 \\ \frac{2x+1}{3x} & , \ 0 < x \le 2 \\ \frac{2x+1}{x^2} & , \ x > 2 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

2. จงหา (f + g)(-1), (f + g)(0) และ (f + g)(5)

$$\text{จาก} \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x & , x < 0 \\ 3x + 2 & , x = 0 \\ 5x + 1 & , 0 < x \leq 2 \\ x^2 + 2x + 1 & , x > 2 \end{cases}$$

ดังนั้น $(f + g)(-1) = 3(-1)^2 + 3(-1) = 0$

$(f + g)(0) = 3(0) + 2 = 2$

$(f + g)(5) = (5)^2 + 2(5) + 1 = 36$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

3. จงหา (f – g)(-1), (f – g)(0) และ (f – g)(5)

$$\text{จาก}\quad (f-g)(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3x & , x < 0 \\ 2 - 3x & , x = 0 \\ -x + 1 & , 0 < x \le 2 \\ 2x + 1 - x^2 & , x > 2 \end{cases}$$

ดังนั้น $(f - g)(-1) = 3(-1)^2 - 3(-1) = 3 - (-3) = 6$

$(f - g)(0) = 2 - 3(0) = 2$

$(f - g)(5) = 2(5) + 1 - (5)^2 = -14$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

4. จงหา $(f \cdot g)(-1)$, $(f \cdot g)(0)$ และ $(f \cdot g)(5)$

จาก
$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 9x^3 & , \quad x < 0 \\ 6x & , \quad x = 0 \\ 6x^2 + 3x & , \quad 0 < x \le 2 \\ 2x^3 + x^2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

ดังนั้น $(f \cdot g)(-1) = 9(-1)^3 = -9$

$(f \cdot g)(0) = 6(0) = 0$

$(f \cdot g)(5) = 2(5)^3 + (5)^2 = 250 + 25 = 275$

ตัวอย่าง 10.3 (ต่อ)

5. จงหา $(\frac{f}{g})(-1)$, $(\frac{f}{g})(2)$ และ $(\frac{f}{g})(5)$

จาก $$(\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ \frac{2x+1}{3x} & , 0 < x \leq 2 \\ \frac{2x+1}{x^2} & , x > 2 \end{cases}$$

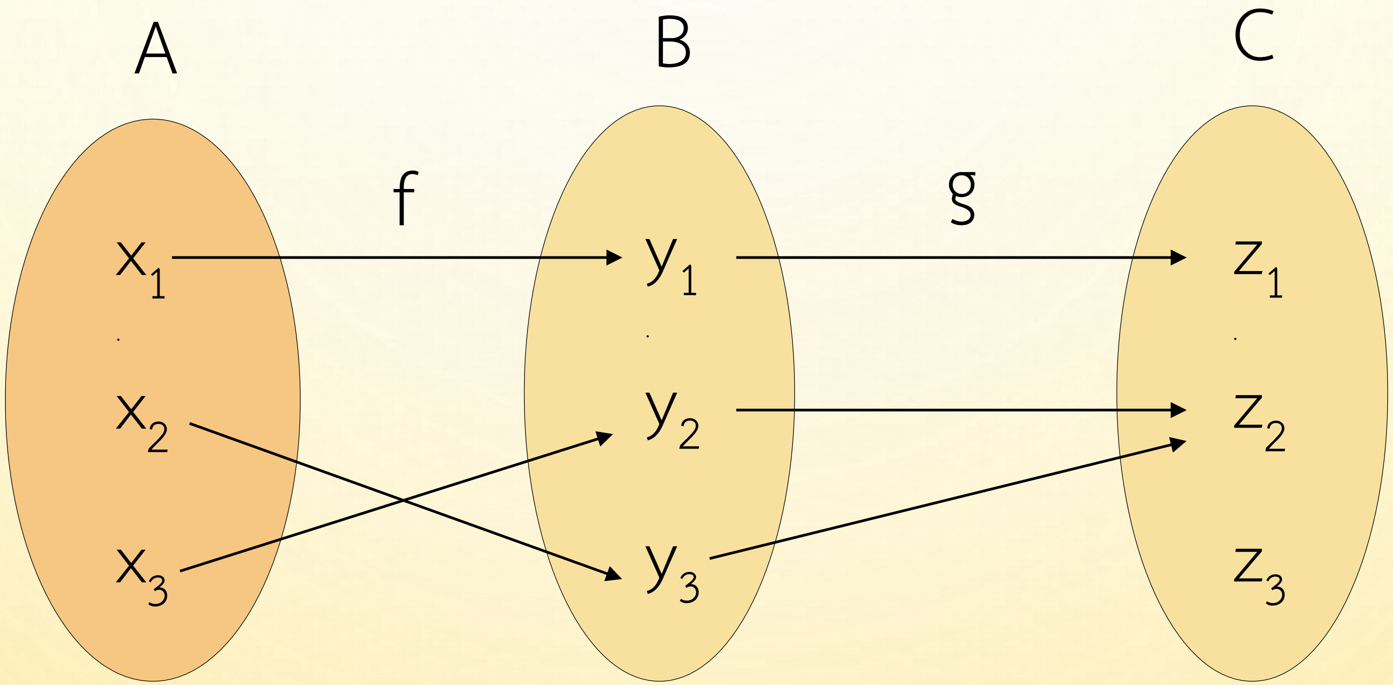
ดังนั้น $(\frac{f}{g})(-1) = -1$

$$(\frac{f}{g})(2) = \frac{2(2)+1}{3(2)} = \frac{5}{6}$$

$$(\frac{f}{g})(5) = \frac{2(5)+1}{(5)^2} = \frac{11}{25}$$

11. ฟังก์ชันประกอบ

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$

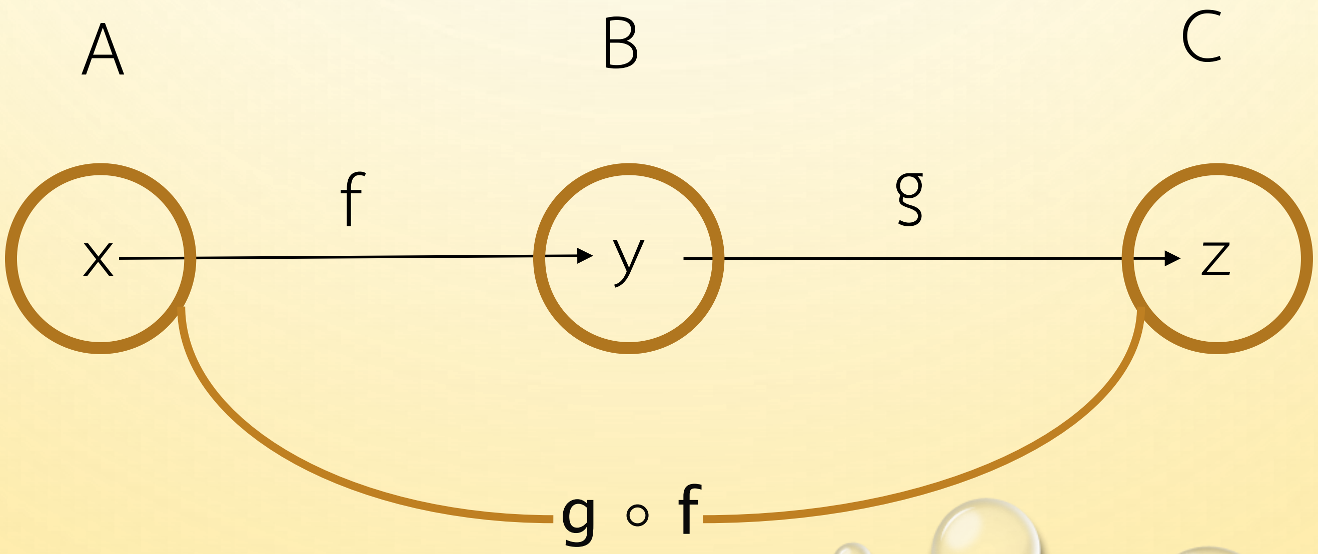


จากแผนภาพจะได้ว่า $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_3$ และ $f(x_3) = y_2$

$g(y_1) = z_1$, $g(y_2) = z_2$ และ $g(y_3) = z_2$

11. ฟังก์ชันประกอบ (ต่อ)

จะเห็นว่าฟังก์ชัน f และ g สามารถสร้างฟังก์ชันใหม่โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซต A, B และ C ได้ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C คือ $\{(x_1, z_1), (x_2, z_2), (x_3, z_2)\}$ เรียกว่า **ฟังก์ชันประกอบ** เขียนแทนด้วย $(g \circ f)$ และเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



11. ฟังก์ชันประกอบ (ต่อ)

บทนิยาม

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_f \subset D_g$ ฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ f และ g เขียนแทนด้วย gof อ่านว่า “จีโอเอฟ” และ

$$gof = \{(x, z) \mid x \in D_f \text{ และ } z \in R_g \text{ ซึ่ง } y \in R_f \text{ ทำให้ } (x, y) \in f \text{ และ } (y, z) \in g\}$$

หรือ

$$gof(x) = g(f(x)) \text{ สำหรับทุก } x \in D_f \text{ ซึ่ง } f(x) \in D_g$$

ตัวอย่าง 11.1

กำหนดให้ $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$ และ $g = \{(2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$ จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ **$g \circ f(x)$**

จาก $D_g = \{2, 3, 4\}$ และ $R_f = \{2, 4\}$

จะได้ว่า $R_f \subset D_g$

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(2) = 4$

$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(4) = 2$

$g \circ f(5) = g(f(5)) = g(4) = 2$

ดังนั้น $g \circ f(x) = \{(1, 4), (3, 2), (5, 2)\}$

$f \circ g(x)$

จาก $D_f = \{1, 3, 5\}$ และ $R_g = \{2, 4\}$

จะได้ว่า $R_g \not\subset D_f$

ดังนั้นไม่สามารถหา $f \circ g(x)$ ได้

ตัวอย่าง 11.2

กำหนดให้ f = {(1, 3), (2, 5), (7, 4)} และ g = {(3, 7), (4, 1), (5, 2)} จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ

$g \circ f(x)$

จาก $D_g = \{3, 4, 5\}$ และ $R_f = \{3, 4, 5\}$

จะได้ว่า $R_f \subset D_g$

$g(f(1)) = g(3) = 7$

$g(f(2)) = g(5) = 2$

$g(f(7)) = g(4) = 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \{(1, 7), (2, 2), (7, 1)\}$

$f \circ g(x)$

จาก $D_f = \{1, 2, 7\}$ และ $R_g = \{1, 2, 7\}$

จะได้ว่า $R_g \subset D_f$

$f(g(3)) = f(7) = 4$

$f(g(4)) = f(1) = 3$

$f(g(5)) = f(2) = 5$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \{(3, 4), (4, 3), (5, 5)\}$

ตัวอย่าง 11.3

กำหนดให้ $f = \{(1, 4), (2, 2), (3, 6), (4, 6)\}$ และ $g = \{(1, 1), (3, 3), (5, 7), (7, 4)\}$ จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ **$g \circ f(x)$** **$f \circ g(x)$**

จาก $D_g = \{1,3,5,7\}$ และ $R_f = \{2,4,6\}$

จะได้ว่า $R_f \not\subset D_g$

ดังนั้นไม่สามารถหา $g \circ f(x)$

จาก $D_f = \{1,2,3,4\}$ และ $R_g = \{1,3,4,7\}$

จะได้ว่า $R_g \cap D_f = \{1,3,4\} \neq \varnothing$ จึงหา $f \circ g(x)$ ได้

$f(g(1)) = f(1) = 4$ $f(g(3)) = f(3) = 6$

$f(g(5)) = f(7)$ หาค่าไม่ได้ เพราะ 7 ไม่อยู่ในโดเมนของ f

$f(g(7)) = f(4) = 6$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \{(1, 4), (3, 6), (7, 6)\}$

ตัวอย่าง 11.4

กำหนดให้ $f : R \rightarrow R$ โดยที่ $f(x) = 7x$ และ $g : R \rightarrow R$ โดยที่ $g(x) = x + 5$ จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ

$g \circ f(x)$

จาก $f(x) = 7x$ จะได้ว่า $R_f = R$

และจาก $g(x) = x + 5$ จะได้ว่า $D_g = R$

จะได้ $R_f \cap D_g = R \neq \varnothing$ จึงหา $g \circ f(x)$ ได้

จาก $g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(7x)$

$= 7x + 5$

ดังนั้น $g \circ f(x) = 7x + 5$

$f \circ g(x)$

จาก $g(x) = x + 5$ จะได้ว่า $R_g = R$

และจาก $f(x) = 7x$ จะได้ว่า $D_f = R$

จะได้ $R_g \cap D_f = R \neq \varnothing$ จึงหา $f \circ g(x)$ ได้

จาก $f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(x + 5)$

$= 7(x + 5) = 7x + 35$

ดังนั้น $f \circ g(x) = 7x + 35$

ตัวอย่าง 11.5

กำหนดให้ $f : R \longrightarrow R$ โดยที่ $f(x) = 2x + 3$ และ $g : R \longrightarrow R$ โดยที่ $g(x) = x^2 + 1$ จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ

$g \circ f(x)$

จาก $D_g = R$ และ $R_f = R$

จะได้ว่า $R_f \subset D_g$ จึงหา $g \circ f(x)$ ได้

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+3)$

$g(2x+3) = (2x+3)^2 + 1$

$= 4x^2 + 12x + 10$

ดังนั้น $g \circ f(x) = 4x^2 + 12x + 10$

$f \circ g(x)$

จาก $D_f = R$ และ $R_g = \{x \mid x \geq 1\}$

จะได้ว่า $R_g \subset D_f$ จึงหา $f \circ g(x)$ ได้

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)$

$f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) + 3$

$= 2x^2 + 5$

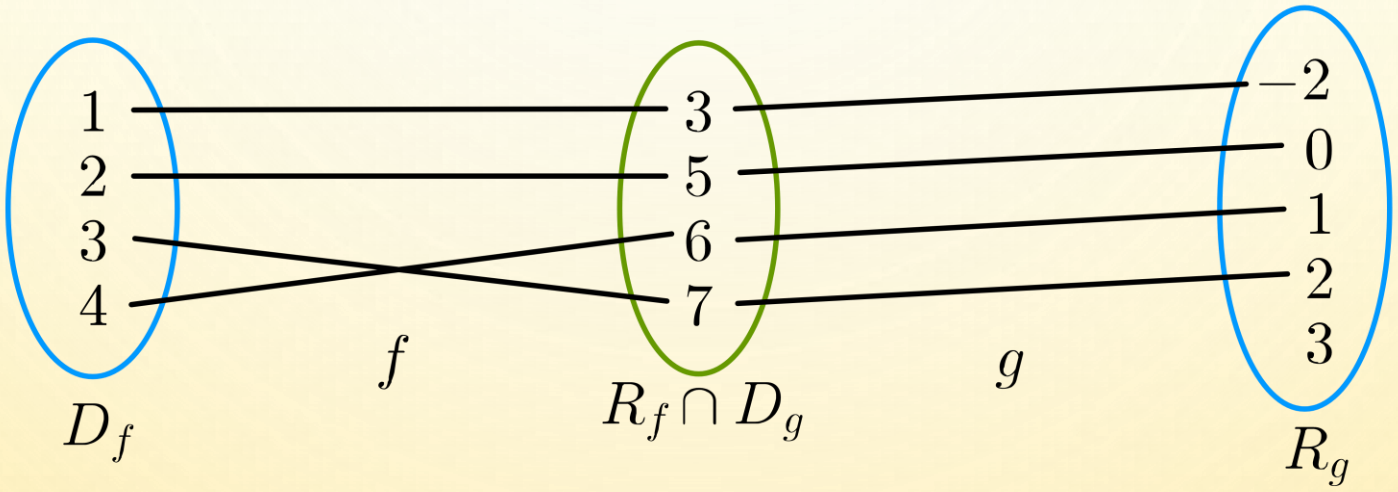
ดังนั้น $f \circ g(x) = 2x^2 + 5$

ตัวอย่าง 11.6

กำหนดให้ f={(1,3),(2,5),(3,7),(4,6)} และ g={(3,−2),(4,3),(5,0),(6,1),(7,2)}

จงหา g∘f, f∘g, f∘f และ g∘g

วิธีทำ หา g∘f



เริ่มต้นจากโดเมนในฟังก์ชัน f เช่น x=1 ส่งผ่านไปยัง f(1)=3 และส่งต่อไปยัง

g(f(1)) = g(3) = −2 จะได้ว่า (g∘f)(1) = −2

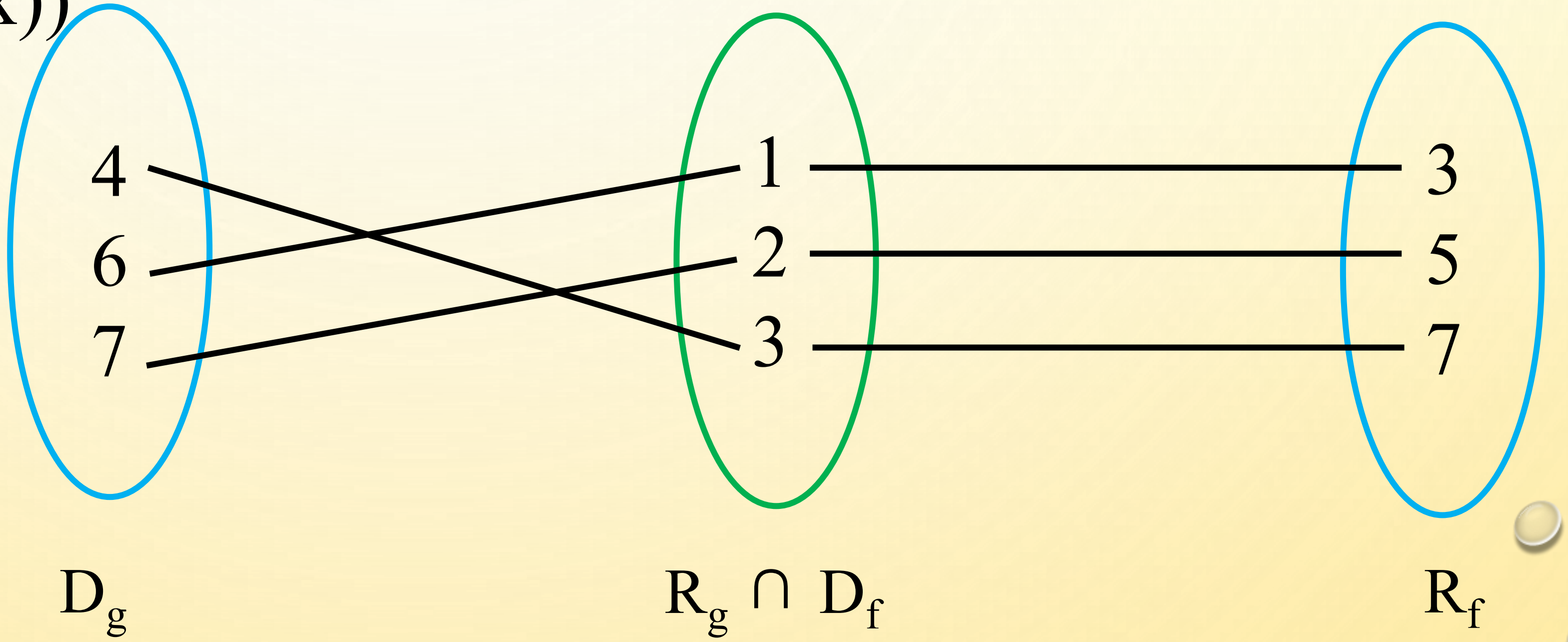
ดังนั้น g∘f = {(1, −2),(2, 0),(3, 2),(4, 1)}

ตัวอย่าง 11.6 (ต่อ)

กำหนดให้ $f=\{(1,3),(2,5),(3,7),(4,6)\}$ และ $g=\{(3,-2),(4,3),(5,0),(6,1),(7,2)\}$

จงหา $g\circ f$, $f\circ g$, $f\circ f$ และ $g\circ g$

วิธีทำ หา $f\circ g(x)$ ---> $f(g(x))$



ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$f\circ g = \{(4,7),(6,3),(7,5)\}$

ตัวอย่าง 11.6 (ต่อ)

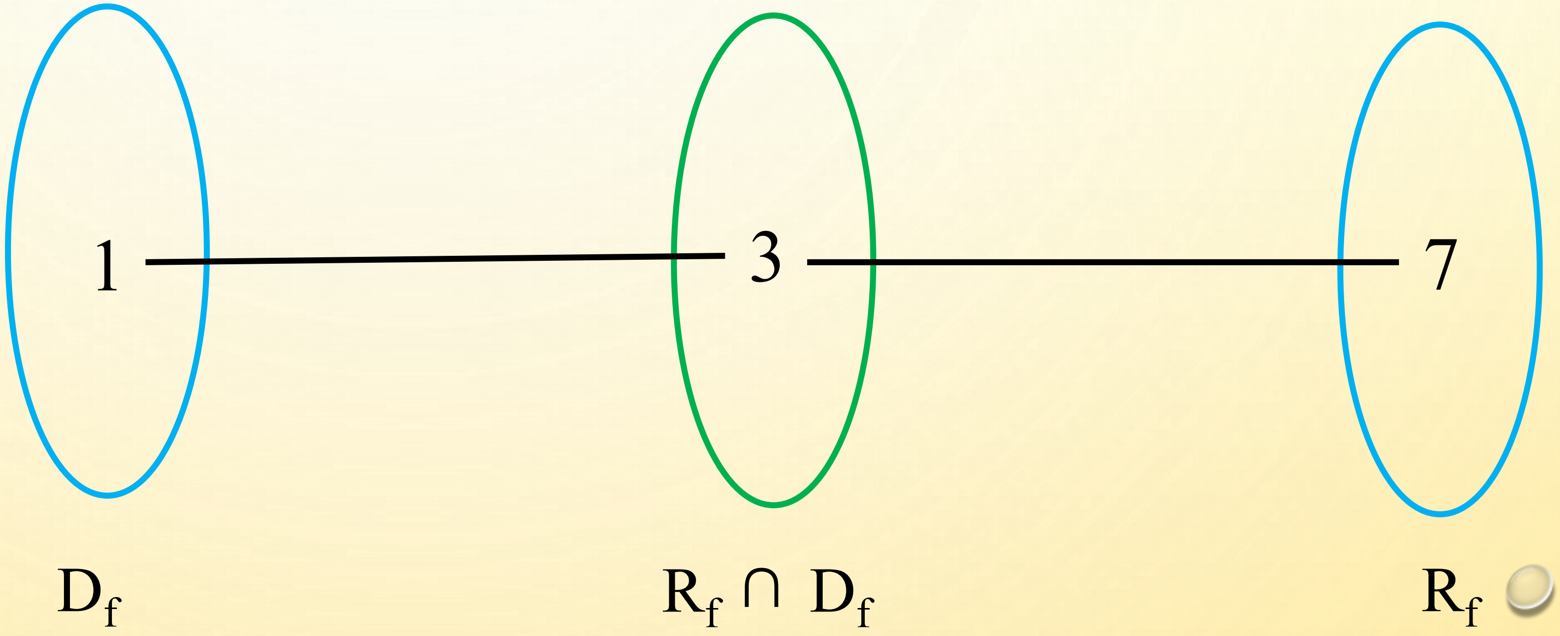
กำหนดให้ $f=\{(1,3),(2,5),(3,7),(4,6)\}$ และ $g=\{(3,-2),(4,3),(5,0),(6,1),(7,2)\}$

จงหา $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ และ $g \circ g$

วิธีทำ หา $f \circ f$

$R_f = \{3, 5, 6, 7\}$

$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$



ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$f \circ f = \{(1,7)\}$

ตัวอย่าง 11.6 (ต่อ)

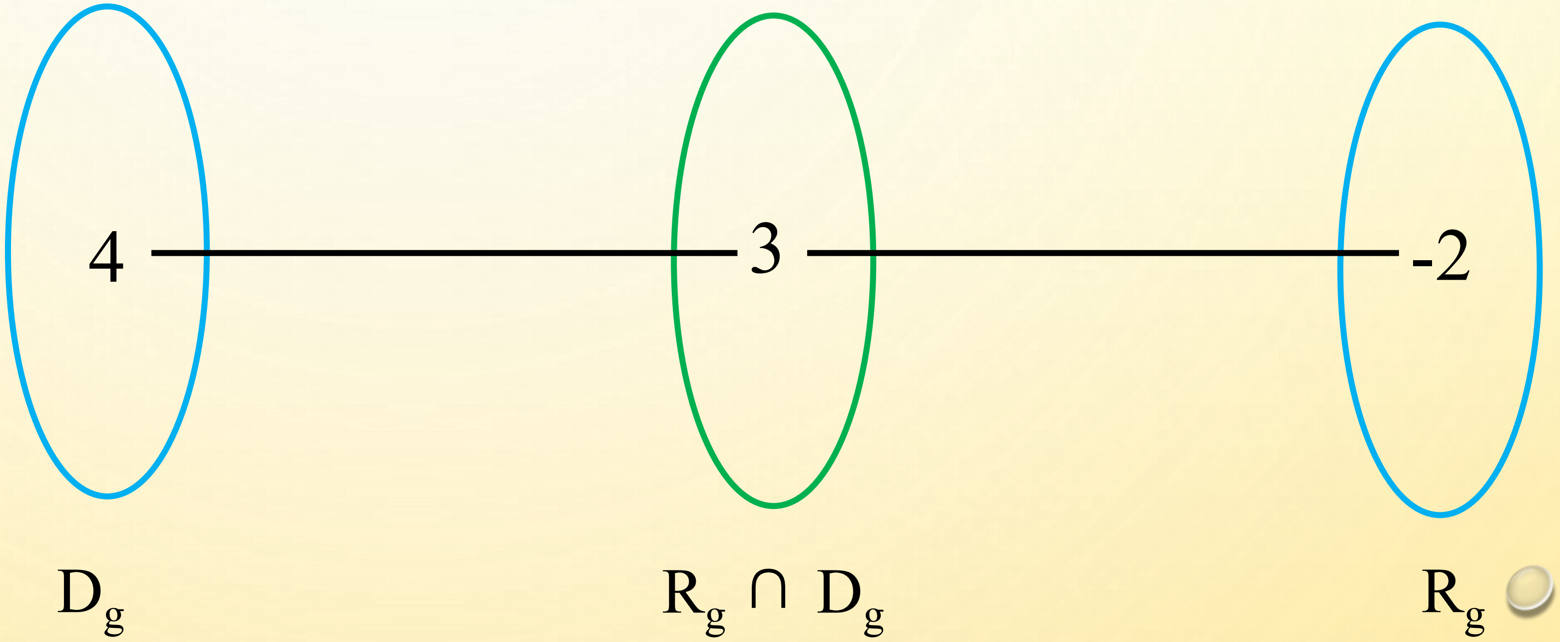
กำหนดให้ $f=\{(1,3),(2,5),(3,7),(4,6)\}$ และ $g=\{(3,-2),(4,3),(5,0),(6,1),(7,2)\}$

จงหา $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ และ $g \circ g$

วิธีทำ หา $g \circ g$

$R_g = \{-2, 3, 0, 1, 2\}$

$D_g = \{3, 4, 5, 6, 7\}$



ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$g \circ g = \{(4,-2)\}$

ตัวอย่าง 11.7

กำหนดให้ $f(x) = x - 5$ และ $g(x) = 1 - x^2$ จงหา $f \circ g(x)$ และ $g \circ f(-1)$

วิธีทำ หา $f \circ g$

$R_g = R$

$D_f = R$

$R_g \cap D_f \neq \emptyset$ แสดงว่าหา $f \circ g$ ได้

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(1-x^2) \\
&= (1-x^2) - 5 \\
&= -x^2 - 4
\end{aligned}
$$

หา $g \circ f$

$R_f = R, D_g = R$

$R_f \cap D_g \neq \emptyset$ แสดงว่าหา $g \circ f$ ได้

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(x - 5) \\
&= 1-(x - 5)^2 \\
&= 1-(x^2-10x+25) \\
&= -x^2 + 10x - 24
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $g \circ f(-1) = -(-1)^2 + 10(-1) - 24$

$= -35$

ตัวอย่าง 11.8

กำหนดให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$ จงหา $g \circ f(3)$ และ $f \circ g(4)$

วิธีทำ หา $g \circ f$

$R_f = R$

$D_g = R - \{3\}$

$R_f \cap D_g \neq \varnothing$ แสดงว่าหา $g \circ f$ ได้

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g(3x - 5)$$
$$= \frac{1}{(3x-5)-3}$$
$$= \frac{1}{3x-8}$$

$(g \circ f)(3) = 1$

หา $f \circ g$

$R_g \neq 0$

$D_f = R$

$R_g \cap D_f \neq \varnothing$ แสดงว่าหา $f \circ g$ ได้

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f\left(\frac{1}{x-3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{1}{x-3}\right) - 5$$
$$= \frac{18-5x}{x-3}$$

$(f \circ g)(4) = -2$

ตัวอย่าง 11.9

กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = \sqrt{x+5}$ จงหา $g\circ f(x)$, $f\circ g(x)$, $f\circ f(x)$ และ $g\circ g(x)$

วิธีทำ หา $g\circ f$

$R_f = R$

$D_g = R \geq -5$

$R_f \cap D_g \neq \emptyset$ แสดงว่าหา $g\circ f$ ได้

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2+5}$$

หา $f\circ g$

$R_g \geq 0$

$D_f = R$

$R_g \cap D_f \neq \emptyset$ แสดงว่าหา $f\circ g$ ได้

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+5}) = (\sqrt{x+5})^2 = x+5$$

ตัวอย่าง 11.9

กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = \sqrt{x+5}$ จงหา $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$, $f \circ g(x)$ และ $g \circ g(x)$

วิธีทำ หา $f \circ f$

$R_f = R$

$D_f = R$

$R_f \cap D_f \neq \emptyset$ แสดงว่าหา $f \circ f$ ได้

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$$

หา $g \circ g$

$R_g \geq 0$

$D_g \geq -5$ (x อยู่ในโดเมนของ g ก็ต่อเมื่อ $x \geq -5$)

$R_g \cap D_g \neq \emptyset$ แสดงว่าหา $g \circ g$ ได้

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x+5}) = \sqrt{\sqrt{x+5}+5}$$

หมายเหตุ $g(x)$ อยู่ในโดเมนของ g ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{x+5} \geq -5$

นั่นคือ $x \geq 20$

ดังนั้นโดเมนของ $g \circ g$ คือ $\{x | x \geq 20\}$