

บทที่ 4 ลำดับ และอนุกรม (Sequences & Series)

ลำดับ

ลำดับ คือ การนำสิ่งต่าง ๆ (ซึ่งมักจะเป็นตัวเลข) มาเรียงอย่างมีลำดับ เช่น 8, 3, 4, 1, 3, 12

โดยจะเรียกแต่ละตัวในลำดับว่า “พจน์”

เช่น ลำดับ 5, 2, 10, 12, 8 จะมี พจน์ที่ 1 คือ 5, พจน์ที่ 2 คือ 2, พจน์ที่ 4 คือ 12 เป็นต้น

และนิยมใช้ตัวแปร a แทนแต่ละพจน์ในลำดับ โดย พจน์ที่ 1 จะแทนด้วย a_1

พจน์ที่ 2 จะแทนด้วย a_2

...

พจน์ที่ n จะแทนด้วย a_n

ลำดับ (ต่อ)

เช่น ลำดับ 5, 7, 9, 11, ... , 41 จะมี $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_5 = 13$, $a_8 = 19$

บางครั้งอาจมีลำดับที่มีพจน์ “ต่อไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด” เช่น 3, 5, 7, 9, 11, ...

ลำดับเหล่านี้ จะมี “...” ต่อท้ายเพื่อบอกว่ามีพจน์ต่อท้ายไปเรื่อย ๆ และจะเรียกลำดับประเภทนี้ว่า “ลำดับอนันต์”

แต่ถ้าในลำดับ มีจำนวนพจน์ เป็นจำนวนจำกัด จะเรียกว่าเป็น “ลำดับจำกัด” เช่น

1, 2, 3, 4, ... เป็นลำดับอนันต์

3, 5, 7 เป็นลำดับจำกัด

2, 4, 6, ... , 200000 เป็นลำดับจำกัด

ลำดับ (ต่อ)

ในกรณีที่ตัวเลขในลำดับเรียงอย่างมีระเบียบก็จะสามารถหา “สูตร” สำหรับหาพจน์ที่ต้องการได้ โดยจะเรียกสูตรดังกล่าวว่า “สูตรพจน์ทั่วไป” เช่น

ลำดับ 5, 7, 9, 11, ... , 41 จะมีสูตรพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 2n + 3$

ถ้ามีสูตรนี้ก็จะหาพจน์ใด ๆ ที่ต้องการก็ได้ เช่น $a_1 = (2)(1) + 3 = 5$

$$a_2 = (2)(2) + 3 = 7$$

$$a_5 = (2)(5) + 3 = 13$$

$$a_8 = (2)(8) + 3 = 19$$

ในทำนองกลับกัน ถ้าใช้สูตรพจน์ทั่วไปก็จะสามารถหาว่าตัวเลขที่กำหนด เป็นพจน์ที่เท่าไรก็ได้โดยการแก้สมการย้อนกลับ

ลำดับ (ต่อ)

เช่น ลำดับ $a_n = 2n + 3$ ถ้าอยากรู้ว่า 29 เป็นพจน์ที่เท่าใด ก็ให้แก้สมการดังนี้

$$29 = 2n + 3$$

$$26 = 2n$$

$$13 = n$$

ถ้าอยากรู้ว่า 19 เป็นพจน์ที่เท่าใด ก็ให้แก้สมการดังนี้

$$19 = 2n + 3$$

$$16 = 2n$$

$$8 = n$$

ถ้าอยากทราบว่าลำดับ 5, 7, 9, 11, ... , 41 มีกี่พจน์ ให้แก้สมการ

$$41 = 2n + 3$$

$$38 = 2n$$

$$19 = n$$

ลำดับ (ต่อ)

บางครั้งนิยมเขียนลำดับเป็น เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยให้ x แทน “ลำดับที่” และให้ y แทน “พจน์” เช่น ลำดับ 2, 4, 6, 8, ...

สามารถเขียนอีกแบบได้เป็น $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$

หรือเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{I}^+ \wedge y = 2x\}$

ดังนั้น บางครั้งอาจกล่าวได้ว่า “ลำดับ คือ ความสัมพันธ์ที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก” ก็ได้

แบบฝึกหัด#1

1. จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ ซึ่งมีสูตรพจน์ทั่วไปดังต่อไปนี้

1) $a_n = 2n + 1$ 2) $a_n = 3n - 1$

3) $a_n = n^2$ 4) $a_n = (n + 1)^2$

5) $a_n = 2^n$ 6) $a_n = 10^n$

2. ลำดับหนึ่ง มีสูตรพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 5n - 3$ จงหาว่า 32 เป็นพจน์ที่เท่าไรของลำดับนี้

3. ลำดับหนึ่ง มีสูตรพจน์ทั่วไป คือ $a_n = 4n + 3$ จงหาว่าลำดับนี้ มีบางพจน์เท่ากับ 29 หรือไม่

4. ถ้าพจน์สุดท้ายของลำดับ $a_n = 3n + 2$ มีค่า 56 จงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์

5. จงหาว่า พจน์สุดท้ายที่มีค่าน้อยกว่า 100 ของลำดับ $a_n = 2n + 5$ คือ พจน์ที่เท่าใด

$$\begin{aligned} 5) \quad 100 &= 2n + 5 \\ 2n &= 100 - 5 \\ &= 95 \\ n &= 95/2 \\ &= 47.5 \text{ ----} > 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2n + 5 \\ &= 2(47) + 5 = 99 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด#1 (ต่อ)

- ลำดับหนึ่งมีสูตรพจน์ทั่วไป คือ $a_n = n(n + 1)$ จงหาว่า ลำดับนี้มีกี่พจน์ที่มีค่าน้อยกว่า 110
- จงหาว่าลำดับ $a_n = 35 - 2n$ มีกี่พจน์ที่มากกว่า 0
- จงหาว่าใน 20 พจน์แรกของลำดับ $a_n = n + 2$ มีกี่พจน์ที่เป็นเลขคู่
- จงหาว่าใน 30 พจน์แรกของลำดับ $a_n = (-1)^n$ มีกี่พจน์ที่เป็นจำนวนเต็มบวก
- จงหาว่าใน 40 พจน์แรกของลำดับ $a_n = n + (-1)^n$ มีกี่พจน์ที่เป็นเลขคู่

แบบฝึกหัด#1 (ต่อ)

11. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1) $1, 2, 3, 4, \dots$

3) $1, 4, 9, 16, \dots$

5) $2, 4, 8, 16, \dots$

7) $10, 100, 1000, 10000, \dots$

2) $3, 3, 3, 3, \dots$

4) $4, 9, 16, 25, \dots$

6) $-1, 1, -1, 1, \dots$

8) $9, 99, 999, 9999, \dots$

12. ถ้า $a_n = \frac{2^n - 1}{3n - 2}$ แล้ว ข้อใดผิด

1) $a_1 = 1$

3) $a_3 = 1$

5) $a_5 = \frac{31}{13}$

2) $a_2 = \frac{3}{4}$

4) $a_4 = \frac{7}{10}$

แบบฝึกหัด#1 (ต่อ)

14)	1	2	3	4	...	40
	2	4	2	4	...	4

Ans. 20 พจน์

13. ถ้า $a_n = \frac{2 - (-1)^n n}{2n + 3}$ แล้ว ข้อใดถูก

1) $a_1 = \frac{1}{5}$

2) $a_2 = \frac{4}{7}$

3) $a_3 = -\frac{1}{9}$

4) $a_4 = \frac{2}{11}$

5) $a_5 = \frac{7}{13}$

14. ใน 40 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3 + (-1)^n$ มีกี่พจน์ ที่มีค่าเท่ากับพจน์ที่ 40

15. พจน์ที่ 8 ของลำดับ $\frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{16}{13}, \frac{32}{17}, \frac{64}{21}, \dots$ เท่ากับเท่าใด

15) $\frac{2^{n+1}}{4n+1}$

ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่เพิ่มหรือลดอย่างคงที่โดย**การบวก**

ตัวอย่างลำดับเลขคณิต เช่น

5 , 8 , 11 , 14 , 17	1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3
4 , 1 , -2 , -5 , -8	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$

แต่ 2, 4, 8, 16 ไม่เป็นลำดับเลขคณิต เพราะบวกเพิ่มไม่คงที่

เรียก **ค่าคงที่** ที่นำมาบวก ว่า “ผลต่างร่วม” ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ d เช่น

5 , 8 , 11 , 14 $\rightarrow d = 3$	5 , 3 , 1 , -1 $\rightarrow d = -2$
1 , 3 , 5 , 7 $\rightarrow d = 2$	$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \rightarrow d = \frac{1}{2}$
5 , 5 , 5 , 5 $\rightarrow d = 0$	

ลำดับเลขคณิต (ต่อ)

จะเห็นว่า ถ้านำสองพจน์ที่อยู่ติดกันในลำดับเลขคณิตมาลบกัน (พจน์ขวา ลบ พจน์ซ้าย)

จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ d เสมอ

เช่น ลำดับเลขคณิต 5, 8, 11, 14, ... จะเห็นว่า $8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3 = d$

ลำดับเลขคณิต (ต่อ)

ตัวอย่าง 1 ถ้าลำดับ x , $2x-1$, $x+8$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหาผลต่างร่วมของลำดับนี้
วิธีทำ

เนื่องจากลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ดังนั้น พจน์ที่อยู่ติดกัน **ลบกัน** ต้องเท่ากันทุกคู่
จะได้ $(2x - 1) - (x) = (x + 8) - (2x - 1)$

$$2x - 1 - x = x + 8 - 2x + 1$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

แทนค่า x ลงในลำดับ จะได้ 5, 9, 13

ดังนั้น ผลต่างร่วม (d) = $9 - 5 = 4$

ตัวอย่าง 2

ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรก เท่ากับ 9 และ 15 ตามลำดับ
จงหาสามพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ

จะใช้วิธีสมมติ x สร้างสมการ แล้วแก้สมการ

โจทย์ประเภทนี้ นิยมใช้เทคนิค “สมมติให้ x แทนพจน์กลาง” เพื่อความสะดวกในการ
ตัดเลข

แต่ละพจน์ในลำดับเลขคณิต ต้องห่างกัน d ดังนั้น จะได้สามพจน์นี้ คือ $x-d$, x ,
 $x+d$

ตัวอย่าง 2 (ต่อ)

สามพจน์แรก บวกกันได้ 9 ดังนั้น

$$(x - d) + x + (x + d) = 9$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

แทนค่า x จะได้ สามพจน์นี้ คือ $3 - d$, 3 , $3 + d$

สามพจน์นี้ คูณกันได้ 15 ดังนั้น

$$(3 - d)(3)(3 + d) = 15$$

$$9 - d^2 = 5$$

$$d^2 = 4$$

$$d = -2, 2$$

(มี 2 คำตอบ)

แทนค่า $d = 2$ จะได้ สามพจน์นี้ คือ 1, 3, 5

แทนค่า $d = -2$ จะได้ สามพจน์นี้ คือ 5, 3, 1

สูตรสำคัญของลำดับเลขคณิต

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

โดยที่

1. a_n คือ พจน์ที่ n
2. a_1 คือ พจน์ที่ 1
3. n คือ จำนวนพจน์
4. d คือ ผลต่างร่วม

ตัวอย่าง 3

จงหาพจน์ที่ 21 ของลำดับเลขคณิต 100, 97, 94, 91, ... , 10 และจงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์
วิธีทำ

จากลำดับที่ให้ จะเห็นว่า $a_1 = 100$ และ $d = -3$

ดังนั้น สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$a_n = 100 + (n - 1)(-3)$$

$$= 100 - 3n + 3$$

$$= -3n + 103$$

ดังนั้น พจน์ที่ 21 คือ $a_{21} = -3(21) + 103$

$$= -63 + 103$$

$$= 40$$

ตัวอย่าง 3 (ต่อ)

จงหาพจน์ที่ 21 ของลำดับเลขคณิต 100, 97, 94, 91, ... , 10 และจงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์
วิธีทำ

หาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์

จากลำดับที่ให้ จะเห็นว่า $a_1 = 100$, $a_n = 10$ และ $d = -3$

จากสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$a_n = 100 + (n - 1)(-3)$$

$$10 = 100 - 3n + 3$$

$$= -3n + 103$$

$$3n = 93$$

$$n = 31$$

ดังนั้น ลำดับนี้มี 31 พจน์

ตัวอย่าง 4

ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี $a_4 = 20$ และ $a_{10} = 38$ จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

วิธีทำ หลักคิด : ต้องหาค่าของ d และ a_1

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

แทน $n = 4$ จะได้ $a_4 = a_1 + (4 - 1)d$

$$20 = a_1 + 3d \quad (1)$$

แทน $n = 10$ จะได้ $a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$

$$38 = a_1 + 9d \quad (2)$$

ตัวอย่าง 4 (ต่อ)

$$20 = a_1 + 3d \quad (1)$$

$$38 = a_1 + 9d \quad (2)$$

$$(2) - (1) \quad 38 - 20 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 3d)$$

$$18 = a_1 + 9d - a_1 - 3d$$

$$18 = 6d$$

$$d = 3$$

แทน $d = 3$ ใน (1) $20 = a_1 + 3(3)$

$$a_1 = 20 - 9 = 11$$

ดังนั้น จะได้สูตรพจน์ทั่วไปคือ $a_n = 11 + (n - 1)(3) = 11 + 3n - 3$

$$a_n = 3n + 8$$

ตัวอย่าง 5

จงหาว่าตั้งแต่ 100 ถึง 500 มีจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว ทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ ตัวแรกตั้งแต่ 100 ขึ้นไป ที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ 105 ตัวถัดไปคือ 112, 119, 126, ...

และตัวสุดท้ายที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ 497

คำตอบของข้อนี้ คือ “จำนวนพจน์” ในลำดับ 105, 112, 119, 126, ... , 497

จะเห็นว่าลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต มี $a_1 = 105$, $a_n = 497$ และ $d = 7$

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

จะได้ว่า $497 = 105 + (n - 1)7$

$$497 = 105 + 7n - 7$$

$$399 = 7n$$

ตัวอย่าง 5 (ต่อ)

$$\begin{aligned}n &= \frac{399}{7} \\ &= 57\end{aligned}$$

จะได้ว่า 497 คือ พจน์ที่ 57 ดังนั้น ลำดับนี้มี 57 พจน์

นั่นคือ ตั้งแต่ 100 ถึง 500 มีจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัวทั้งสิ้น 57 จำนวน

แบบฝึกหัด#2

1. จงพิจารณาว่า ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเลขคณิต พร้อมทั้งหาผลต่างร่วม

1) 3, 5, 7, 9, ...	2) 1, 4, 9, 16, ...	3) 3, 6, 9, 12, ...
4) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$	5) 3, 1, -1, -3, ...	6) -3, 5, -7, 9, ...
7) 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, ...	8) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$	9) 2, 4, 8, 16, ...
10) 1, 1, 3, 3, 5, 5, ...	11) $x, x + 2, x + 4, \dots$	12) $a, 2a, 3a, 4a, \dots$

2. ถ้าลำดับ $x + 1, 2x + 1, 4x - 2$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหาค่า x

3. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวก 3 พจน์แรก เท่ากับ 3 และผลคูณ 2 พจน์แรก เท่ากับ -2 จงหาผลต่างร่วม

แบบฝึกหัด#2 (ต่อ)

- ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี $a_3 = 11$ และ $a_8 = 21$ จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้
- ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี $a_2 = 1$ และ $a_5 = 10$ จงหาค่าของ a_8
- ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี $a_5 - a_2 = 30$ จงหาค่าผลต่างร่วม
- ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี $a_{15} - a_4 = 22$ ถ้า $a_{10} = 21$ จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับชุดนี้
- จงหาว่าระหว่าง 200 กับ 300 มีกี่จำนวนที่

1) หารด้วย 3 ลงตัว

2) หารด้วย 5 ลงตัว

3) หารด้วย 3 และ 5 ลงตัว

4) หารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว

5) หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

6) หารด้วย 5 เหลือเศษ 2

แบบฝึกหัด#2 (ต่อ)

9. จงหาว่า ตั้งแต่ 150 ถึง 450 มีจำนวนที่หลักหน่วยลงท้ายด้วย 8 ทั้งหมดกี่จำนวน
10. นายดำกู้เงินมาจำนวนหนึ่ง โดยจ่ายคืนเดือนแรก 200 บาท และในเดือนถัดไป นายดำต้องจ่ายเพิ่มขึ้นทุก ๆ เดือน โดยจะต้องจ่ายคืนมากขึ้นเดือนละ 50 บาท หลังจากชำระหมด พบว่าในเดือนสุดท้าย นายดำจ่ายคืน 950 บาท จงหาว่านายดำจ่ายเงินคืนทั้งสิ้นกี่เดือน
11. นาย ก มีเงินในกระปุก 20 บาท และจะหยอดกระปุกวันละ 3 บาททุก ๆ วัน นาย ข มีเงินในธนาคาร 300 บาท และจะฝากเพิ่มวันละ 20 บาททุก ๆ วัน ในวันที่ นาย ก มีเงินในกระปุก 44 บาท นาย ข จะมีเงินในธนาคารเท่าไร

ตัวกลางเลขคณิต

“ตัวกลางเลขคณิต” ระหว่าง a กับ b หาได้จากสูตร $\frac{a+b}{2}$

จะเห็นว่า ถ้า x เป็นตัวกลางเลขคณิตระหว่าง a กับ b แล้ว จะได้ว่า ลำดับ a, x, b เป็นลำดับเลขคณิตเสมอ

เช่น ตัวกลางเลขคณิต ระหว่าง 23 กับ 91 คือ $\frac{23+91}{2} = 57$

ซึ่งจะเห็นว่า 23, 57, 91 เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม คือ 34

ตัวกลางเลขคณิต “ k จำนวน” ระหว่าง a กับ b คือ ตัวเลข k ตัว ที่แทรกระหว่าง a กับ b แล้วได้ลำดับเลขคณิต โดยแต่ละคู่ที่อยู่ติดกันจะมีผลต่างร่วม คือ $d = \frac{b-a}{k+1}$

ตัวกลางเลขคณิต (ต่อ)

เช่น ถ้าจะหาตัวกลางเลขคณิต 3 จำนวน ระหว่าง 23 กับ 91 จะได้แต่ละตัวต่างกัน

$$\begin{aligned}d &= \frac{91-23}{3+1} \\ &= \frac{68}{4} \\ &= 17\end{aligned}$$

ดังนั้น ตัวกลางเลขคณิต 3 จำนวน ระหว่าง 23 กับ 91 คือ 40, 57, 74

ซึ่งจะเห็นว่า 23, 40, 57, 74, 91 เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม คือ 17

แบบฝึกหัด#3

1. จงหาตัวกลางเลขคณิต ระหว่าง 12 และ 38
2. จงหาตัวกลางเลขคณิต ระหว่าง -3 และ 9
3. ถ้าตัวกลางเลขคณิตระหว่าง 2 กับ x คือ 13 แล้ว จงหาค่า x
4. จำนวนคู่หนึ่ง มีตัวกลางเลขคณิตคือ 10 ถ้าจำนวนคู่นี้ห่างกัน 6 แล้ว จงหาจำนวนคู่นี้
5. จงหาตัวกลางเลขคณิต 4 จำนวน ระหว่าง 17 กับ 32
6. จงหาตัวกลางเลขคณิต 3 จำนวน ระหว่าง 1 กับ 25
7. จงหาตัวกลางเลขคณิต 4 จำนวน ระหว่าง -8 กับ 17
8. ถ้าตัวกลางเลขคณิต 2 จำนวน ระหว่าง a และ b คือ 12 และ 20 แล้ว จงหา a และ b

แบบฝึกหัด#4

1. กำหนดให้ $k, 3k, 6k+2$ เป็น 3 พจน์ เรียงกันในลำดับเลขคณิต โดยที่ลำดับนี้มีพจน์แรกเป็น $-7k$ จงหาพจน์ที่ 50 ของลำดับชุดนี้
2. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวกลางเลขคณิต 5 พจน์ ระหว่าง 31 กับ 55
3. จงหาจำนวนจริง x, y ซึ่งทำให้ $1, x, y, -65$ เป็นลำดับเลขคณิต
4. เลขสี่จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยผลคูณของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สามมากกว่า ผลคูณของอีกสองจำนวนอยู่ 32 และผลคูณของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สี่มากกว่าผลคูณของอีกสองจำนวนอยู่ 72 แล้ว จำนวนที่มีค่ามากที่สุดมีค่าเท่าใด

แนวทางการคิด

ให้ 4 พจน์เป็น $x-d, x, x+d, x+d+d \implies x+d+d = x+2d$

ดังนั้นทั้ง 4 พจน์ คือ $x-d, x, x+d, x+2d$

แบบฝึกหัด#4

5. ถ้าจัดแผ่นไม้กองหนึ่งซ้อน ๆ กัน ให้ชั้นล่างมีไม้เรียงตามยาวชิดกันตลอด 52 แผ่น วางชั้นที่ 2 ให้แนวกึ่งกลางของไม้แต่ละแผ่นในชั้นนี้อยู่ตรงกับรอยต่อของไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก ทำเช่นนี้ในชั้นต่อ ๆ ไป จนชั้นบนสุดมีไม้ 7 แผ่น จงหาความสูงของกองไม้นี้ ถ้าไม้ทุกแผ่นเรียบ และหนา 3 เซนติเมตร เท่ากันทุกแผ่น

แนวทางการคิด

จำนวนแผ่นไม้ในชั้นถัดไปจะน้อยกว่าจำนวนแผ่นไม้ในชั้นก่อนหน้า 1 แผ่น

6. ถ้าผลรวม 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 58 และ พจน์ที่มีค่ามากที่สุดเท่า 22 จงหาอีก 3 พจน์ที่เหลือ

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่เพิ่มหรือลดอย่างคงที่โดย **การคูณ**

ตัวอย่างลำดับเรขาคณิต เช่น

2, 6, 18, 54	3, -6, 12, -24
$10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}$	1, 1, 1, 1

แต่ 1, 4, 9, 16 ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต เพราะคูณเพิ่มไม่คงที่

เรียก **ค่าคงที่** ที่นำมาคูณ ว่า “อัตราส่วนร่วม” ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ r เช่น

2, 6, 18, 54 $\rightarrow r = 3$	3, -6, 12, -24 $\rightarrow r = -2$
5, 5, 5, 5 $\rightarrow r = 1$	$10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}$ $\rightarrow r = \frac{1}{2}$
$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ $\rightarrow r = \sqrt{2}$	

แบบฝึกหัด#4

1. จงพิจารณาว่า ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต พร้อมทั้งหาอัตราส่วนร่วม

1) 2 , 4 , 6 , 8 , ...	2) 1 , 4 , 16 , 64 , ...	3) 1 , 10 , 100 , 1000 , ...
4) 625 , 125 , 25 , 5 , ...	5) 0.8 , 0.08 , 0.008 , ...	6) 5 , 5 , 5 , 5 , ...
7) $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ...	8) 1 , -1 , 1 , -1 , ...	9) 24 , 8 , $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{9}$, ...
10) 3 , $3\sqrt{3}$, 9 , $9\sqrt{3}$, ...	11) 81 , -27 , 9 , -3	12) a , $2a$, $3a$, $4a$, ...

แบบฝึกหัด#4 (ต่อ)

2. จงพิจารณาว่า ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต พร้อมทั้งหาอัตราส่วนร่วม

1) 5 , 15 , 45 , ...	2) 48 , 24 , 12 , ...
3) 2 , $2\sqrt{2}$, 4 , $4\sqrt{2}$, ...	4) $1 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , -\frac{1}{8} , \dots$

แบบฝึกหัด#4 (ต่อ)

3. จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไป (a_n) ให้ดังนี้

ข้อ	พจน์ทั่วไป (a_n)	4 พจน์แรกของลำดับ
1	$-\frac{3}{4}(2^{n-1})$	
2	$2\left(\frac{3^{n-1}}{5^n}\right)$	
3	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$	
4	$16\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}$	
5	$1024\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$	

ลำดับเรขาคณิต (ต่อ)

จะเห็นว่า ถ้านำสองพจน์ที่อยู่ติดกันในลำดับเรขาคณิตมาหารกัน โดยเอาพจน์หน้าเป็นตัวตั้ง หารด้วยพจน์ข้างที่อยู่ติดกัน จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ r เสมอ

เช่น ลำดับเรขาคณิต 2, 6, 18, 54, ... จะเห็นว่า $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3 = r$

ตัวอย่าง 1.1

จงหาจำนวนหนึ่งจำนวนระหว่าง 8 และ 2 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ ให้ 8, x , 2 เป็นลำดับเรขาคณิต

จากนิยามลำดับเรขาคณิตจะได้ว่า $\frac{x}{8} = \frac{2}{x}$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

ดังนั้น จำนวนที่อยู่ระหว่าง 8 และ 2 คือ 4 หรือ -4

ตัวอย่าง 1.2

ปัจจุบันคนสามคน มีอายุ 5, 17, 47 ปี จงหาว่าอีกกี่ปี อายุของคนทั้งสามจึงจะเรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ

เมื่อผ่านไป x ปี อายุของคนทั้งสาม จะกลายเป็น $5 + x$, $17 + x$, $47 + x$ ปีตามลำดับ

ลำดับนี้จะเป็นลำดับเรขาคณิต เมื่อ $\frac{17 + x}{5 + x} = \frac{47 + x}{17 + x}$

$$(17 + x)(17 + x) = (47 + x)(5 + x)$$

$$289 + 34x + x^2 = 235 + 52x + x^2$$

$$18x = 54$$

$$x = 3$$

นั่นคือ อีก 3 ปี อายุของคนทั้งสามจึงจะเรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่าง 2

ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรก เท่ากับ 13 และ 27
ตามลำดับ จงหาสามพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ

จะใช้วิธีสมมติ x สร้างสมการ แล้วแก้สมการ

โจทย์ประเภทนี้ นิยมใช้เทคนิค “สมมติให้ x แทนพจน์กลาง” เพื่อความสะดวกในการ
ตัดเลข

แต่ละพจน์ในลำดับเรขาคณิต ต้องห่างกัน r ดังนั้น จะได้สามพจน์นี้ คือ $\frac{x}{r}, x, xr$

ตัวอย่าง 2 (ต่อ)

สามพจน์แรก คูณกันได้ 27 ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{r}\right)(x)(xr) = 27$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

แทนค่า x จะได้ สามพจน์นี้ คือ $\frac{3}{r}$, 3, $3r$

ตัวอย่าง 2 (ต่อ)

สามพจน์นี้บวกกันได้ 13 ดังนั้น

$$\frac{3}{r} + 3 + 3r = 13$$

$$3 + 3r + 3r^2 = 13r$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(r - 3)(3r - 1) = 0$$

$$r = 3, \frac{1}{3}$$

จากสามพจน์แรก คือ $\frac{3}{r}$, 3, $3r$

แทนค่า $r = 3$ จะได้ สามพจน์นี้ คือ 1, 3, 9

แทนค่า $r = \frac{1}{3}$ จะได้ สามพจน์นี้ คือ 9, 3, 1 (มี 2 คำตอบ)

สูตรสำคัญของลำดับเรขาคณิต

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

โดยที่

1. a_n คือ พจน์ที่ n
2. a_1 คือ พจน์ที่ 1
3. n คือ จำนวนพจน์
4. r คือ อัตราส่วนร่วม

ตัวอย่าง 3

จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$

วิธีทำ

จากลำดับที่ให้ จะเห็นว่า $a_1 = 1$ และ $r = \sqrt{2}$

ดังนั้น สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$a_n = (1) \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พจน์ที่ 10 คือ } a_{10} &= (1) \cdot (\sqrt{2})^{10-1} \\ &= (\sqrt{2})^9 \\ &= 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1

จงหาจำนวนพจน์ของลำดับเรขาคณิต 5, -10, 20, ... , -640

วิธีทำ ลำดับเรขาคณิต 5, -10, 20, ... , -640 มีค่า $r = -2$

จาก $a_1 = 5$, $a_n = -640$, $r = -2$

จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ว่า $-640 = 5(-2)^{n-1}$

$$(-2)^{n-1} = \frac{-640}{5}$$

$$(-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$$

ดังนั้น $n - 1 = 7$

$$n = 8$$

ดังนั้นจำนวนพจน์ของลำดับเรขาคณิตเท่ากับ 8 พจน์

ตัวอย่าง 4.2

ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี $a_3 = 2$ และ $a_7 = 2592$ จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

วิธีทำ หลักคิด : ต้องหาค่าของ r และ a_1

$$\text{จากสูตร } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{แทน } n = 3 \text{ จะได้ } a_3 = a_1 r^{3-1}$$

$$2 = a_1 r^2 \quad (1)$$

$$\text{แทน } n = 7 \text{ จะได้ } a_7 = a_1 r^{7-1}$$

$$2592 = a_1 r^6 \quad (2)$$

ตัวอย่าง 4.2 (ต่อ)

$$2 = a_1 r^2 \quad (1)$$

$$2592 = a_1 r^6 \quad (2)$$

(2) ÷ (1)

$$\frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = \frac{2592}{2}$$

$$r^4 = 1296$$

$$r = \pm \sqrt[4]{1296}$$

$$r = \pm 6$$

$\begin{array}{r} 8 \overline{) 1296} \\ 9 \overline{) 162} \\ 9 \overline{) 18} \\ \quad 2 \end{array}$	$\begin{aligned} 1296 &= 8 \times 9 \times 9 \times 2 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 3^2 \times 2 \\ &= 2^4 \times 3^4 \\ \sqrt[4]{1296} &= \sqrt[4]{2^4 \times 3^4} \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$
--	---

ตัวอย่าง 4.2 (ต่อ)

แทน $r = \pm 6$ ใน (1) $2 = a_1(6)^2$ และ $2 = a_1(-6)^2$

$$a_1 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$

ดังนั้น จะได้สูตรพจน์ทั่วไปคือ $a_n = \frac{6^{n-1}}{18}$ และ $a_n = \frac{-6^{n-1}}{18}$

ตัวอย่าง 5

ลูกบอลตกจากที่สูง 6400 เมตร เมื่อตกถึงพื้น ลูกบอลจะกระดอนกลับขึ้นไปได้สูงเป็นครึ่งหนึ่งของความสูงที่ตกลงมาเสมอ ถ้าปล่อยให้ลูกบอลกระดอนต่อไปเรื่อย ๆ จงหาว่าหลังจากการตกถึงพื้นครั้งที่ 10 ลูกบอล จะกระดอนกลับขึ้นไปได้สูงเท่าใด

วิธีทำ ในการกระดอนครั้งแรก ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูง 3200 เมตร

 ในการกระดอนครั้งที่สอง ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูง 1600 เมตร

 ในการกระดอนครั้งที่สาม ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูง 800 เมตร

จะเห็นว่า ความสูงของลูกบอลกระดอนกลับ เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี

$$a_1 = 3200 \text{ และ } r = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 5 (ต่อ)

จะได้สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $a_n = 3200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
ดังนั้น ครั้งที่ 10 ลูกบอลจะกระดอนสูง $a_{10} = 3200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$

$$= \frac{3200}{2^9}$$
$$= \frac{3200}{512}$$
$$= 6.25 \text{ เมตร}$$

แบบฝึกหัด#4 (ต่อ)

4. จงหาพจน์ที่ 7 ของลำดับ $2, 4, 8, \dots$
5. กำหนดลำดับ $162, -54, 18, \dots$ จงหาค่าของ a_7
6. จงหาว่า 243 เป็นพจน์ที่เท่าไร ของลำดับ $1, \sqrt{3}, 3, \dots$
7. จงหาว่าลำดับ $5, 5\sqrt{2}, 10, \dots, 40$ มีกี่พจน์
8. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรก เท่ากับ 6 และ -64 ตามลำดับ จงหาสามพจน์แรกของลำดับนี้
9. ถ้าลำดับ $x - 1, x + 3, 2x$ เป็นลำดับเรขาคณิต แล้ว จงหาค่า x
10. เด็ก 3 คน มีอายุ 1, 5 และ 13 ปี จงหาว่าอีกกี่ปีอายุของเด็กทั้งสามจึงจะเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

แบบฝึกหัด#4 (ต่อ)

10. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่งชุดหนึ่งมี $a_5 = 24$ และ $a_7 = 96$ จงหา r
11. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่งชุดหนึ่งมี $a_1 = 2$ และ $a_3 = 50$ จงหาสูตรพจน์ทั่วไป
12. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่งชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 10 มีค่าเป็น 9 เท่าของพจน์ที่ 6 ถ้า $a_3 = 3$ แล้วจงหา a_5

เฉลย แบบฝึกหัด#4 ข้อ 12

วิธีทำ จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{พจน์ที่ 10 คือ } a_{10} = a_1 r^9$$

$$\text{พจน์ที่ 6 คือ } a_6 = a_1 r^5$$

พจน์ที่ 10 มีค่าเป็น 9 เท่าของพจน์ที่ 6

$$\text{นั่นคือ } a_1 r^9 = 9a_1 r^5$$

$$r^4 = 9$$

$$r^2 = 3$$

$$\text{จาก } a_3 = a_1 r^2$$

$$\text{จะได้ว่า } 3 = a_1 r^2$$

$$= a_1(3)$$

$$\text{ดังนั้น } a_1 = 1$$

$$\text{พจน์ที่ 5 คือ } a_5 = a_1 r^4$$

$$= 1 \cdot 9$$

$$= 9$$

$$\text{ดังนั้น } a_5 = 9$$

ตัวกลางเรขาคณิต

“ตัวกลางเรขาคณิต” ระหว่าง a กับ b หาได้จากสูตร $\pm\sqrt{ab}$

จะเห็นว่า ถ้า x เป็นตัวกลางเรขาคณิตระหว่าง a กับ b แล้ว จะได้ว่า ลำดับ a, x, b เป็นลำดับเรขาคณิตเสมอ

เช่น ตัวกลางเรขาคณิต ระหว่าง 7 กับ 175 คือ $\pm\sqrt{7 \cdot 175} = \pm\sqrt{7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = \pm 35$

จะเห็นว่า 7, ± 35 , 175 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม คือ 5 และ -5

ตัวกลางเรขาคณิต

ตัวกลางเรขาคณิต “ k จำนวน” ระหว่าง a กับ b คือ ตัวเลข k จำนวนที่แทรก
ระหว่าง a กับ b แล้วได้ลำดับเรขาคณิต โดยลำดับเรขาคณิตดังกล่าว จะมีอัตราส่วนร่วม
สอดคล้องกับสมการ $r^{k+1} = \frac{b}{a}$

ข้อควรระวัง

- ในการแก้สมการหาค่า r ถ้า $k + 1$ เป็นเลขคู่ จะหา r ได้เฉพาะกรณีที่ $\frac{b}{a} \geq 0$ เท่านั้น
- ถ้า $k + 1$ เป็นเลขคู่ ค่า r จะเป็นได้ทั้งบวกและลบ (เพราะ บวก หรือ ลบ ยกกำลังคู่ ก็
ได้ค่าบวกเช่นเดียวกัน)

ตัวอย่าง จงหาตัวกลางเรขาคณิต 5 จำนวน ระหว่าง 4 กับ 108

วิธีทำ ต้องหาจำนวน 5 จำนวน ที่แทรกระหว่าง 4 กับ 108 แล้วได้ลำดับเรขาคณิต

ก่อนอื่นให้หา r จากสมการ $r^{k+1} = \frac{b}{a}$ จะได้ว่า

$$r^{5+1} = \frac{108}{4}$$

$$r^6 = 27$$

$$r^6 = 3^3$$

$$r = \pm \sqrt[6]{3^3} = \pm 3^{\frac{3}{6}} = \pm 3^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{3}$$

ดังนั้น ตัวกลาง 5 จำนวนนั้น คือ $4, 4\sqrt{3}, 12, 12\sqrt{3}, 36, 36\sqrt{3}, 108$

หรือ $4, -4\sqrt{3}, 12, -12\sqrt{3}, 36, -36\sqrt{3}, 108$

แบบฝึกหัด#5

1. จงหาตัวกลางเรขาคณิต ระหว่าง 4 และ 36
2. จงหาตัวกลางเรขาคณิต ระหว่าง -5 และ -20
3. ถ้าตัวกลางเรขาคณิตระหว่าง 3 กับ x คือ ± 15 แล้ว จงหาค่า x
4. จำนวนคู่หนึ่ง มีตัวกลางเรขาคณิต คือ ± 10 ถ้าจำนวนคู่นี้หารกันได้ 4 แล้ว จงหาจำนวนคู่นี้
5. จงหาตัวกลางเรขาคณิต 3 จำนวน ระหว่าง -5 กับ -405
6. จงหาตัวกลางเรขาคณิต 4 จำนวน ระหว่าง 3 กับ $384\sqrt{2}$
7. ถ้าตัวกลางเรขาคณิต 2 จำนวน ระหว่าง a และ b คือ 6 และ 9 แล้ว จงหา a และ b
8. ถ้าตัวกลางเรขาคณิต 3 จำนวน ระหว่าง a และ b คือ 2 4 และ 8 แล้ว จงหา a และ b

อนุกรม

พิจารณาลำดับ 1, 2, 3, ... , 20 ซึ่งเป็นลำดับจำกัด เมื่อนำแต่ละพจน์ของลำดับมาบวกกันจะได้ดังนี้ $1 + 2 + 3 + \dots + 20$

เรียกผลบวกของพจน์ทุกพจน์ในลำดับนี้ อนุกรมจำกัด

และ 1, 4, 9, 16, ... , n^2 , ... ซึ่งเป็นลำดับอนันต์ เมื่อนำแต่ละพจน์ของลำดับมาบวกกัน จะได้ดังนี้

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 + \dots$$

เรียกผลบวกของพจน์ทุกพจน์ในลำดับนี้ว่า อนุกรมอนันต์

อนุกรม (ต่อ)

บทนิยาม

เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์
เรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ หรือ
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ว่า **อนุกรม**

อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า **อนุกรมจำกัด** และอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์
เรียกว่า **อนุกรมอนันต์**

อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และ ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตจะเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิต เช่น

1) $12 + 7 + 2 + \dots + 17 - 5n$ เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มี 12 เป็นพจน์แรก และมี -5 เป็นผลต่างร่วม

2) $8 + 18 + 28 + \dots + 98$ เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มี 8 เป็นพจน์แรก และมี 10 เป็นผลต่างร่วม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ที่มี a_1 เป็นพจน์แรก และมี d เป็นผลต่างร่วม จะได้ว่า

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \dots \dots \dots (1)$$

หรืออาจเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \dots \dots \dots (2)$$

(1)+(2)

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

จำนวน n พจน์ (n วงเล็บ)

หมายเหตุ

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

$$2 * 5 = 10$$

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต (ต่อ)

ดังนั้น

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

ดังนั้น

$$S_n = \frac{n}{2} \{a_1 + a_1 + (n-1)d\}$$
$$= \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

นั่นคือ ถ้าให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่มี a_1 เป็นพจน์แรก และมี d เป็นผลต่างร่วม จะได้ว่า $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ หรือ $S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$

ตัวอย่าง 1

จงหาผลบวกของอนุกรม $8 + 18 + 28 + \dots + 98$

วิธีทำ ให้อนุกรมนี้มี n พจน์ มี $a_1 = 8$, $d = 10$ และ $a_n = 98$

จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$

ดังนั้น $98 = 8 + (n - 1)10$

$$(n-1) = \frac{98-8}{10}$$

$$n = 10$$

จาก $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

ดังนั้น $s_n = \frac{10}{2}(8 + 98) = 530$

ตัวอย่าง 2

จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $(-8) + (-4) + 0 + 4 + \dots$

วิธีทำ อนุกรมให้มี $a_1 = -8$, $d = 4 - 0 = 4$

จาก $s_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$

ดังนั้น $s_n = \frac{20}{2} \{2(-8) + (20-1)4\}$
 $= 10(-16 + 76)$
 $= 600$

ตัวอย่าง 3

จงหาผลบวก 60 พจน์ซึ่งอยู่ระหว่าง 10 และ 160 ของอนุกรมเลขคณิต

วิธีทำ แสดงว่าอนุกรมนี้มี 62 พจน์ (รวมทั้ง 60 และ 160)

ดังนั้น $a_1 = 10$, $a_{62} = 160$

จาก
$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{62}{2} (10 + 160) \\ &= 31(170) \\ &= 5270 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4

จำนวนเต็มระหว่าง 100 ถึง 700 มีกี่จำนวนที่ 8 หารลงตัว และจงหาผลบวกเหล่านั้น

วิธีทำ จำนวนเต็มระหว่าง 100 ถึง 700 มีกี่จำนวนที่ 8 หารลงตัวเป็นลำดับเลขคณิตดังนี้

$$104, 112, 120, \dots, 696$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } 696 = 104 + (n - 1)8$$

$$(n - 1) = \frac{696 - 104}{8}$$

$$n = 75$$

$$\begin{array}{l} \text{จาก} \\ \text{ดังนั้น} \end{array} \quad \begin{array}{l} s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ s_n = \frac{75}{2}(104 + 696) \\ = 30000 \end{array}$$

นั่นคือ จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 700 ที่ 8 หารลงตัว มี 75 จำนวน และมีผลบวกของจำนวนเหล่านั้นเป็น 30,000

ตัวอย่าง 5

อนุกรม $20 + 18\frac{1}{4} + 16\frac{1}{2} + \dots$ มีกี่พจน์จึงจะบวกกันได้ $-1,014$

วิธีทำ อนุกรมนี้มี $a_1 = 20$, $d = 18\frac{1}{4} - 20 = -\frac{7}{4}$ และ $S_n = -1014$

จาก
$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} -1014 &= \frac{n}{2} \{2(20) + (n-1)(-\frac{7}{4})\} \\ &= 20n - \frac{7n}{8}(n-1) \end{aligned}$$

เอา 8 คูณทั้งสองข้าง จะได้ $-8,112 = 160n - 7n^2 + 7n$

$$7n^2 - 167n - 8,112 = 0$$

$$(7n + 169)(n - 48) = 0$$

$$n = 48, -\frac{169}{7} \text{ (ค่าลบใช้ไม่ได้)}$$

ดังนั้นอนุกรมนี้มี 48 พจน์จึงทำให้มีผลบวกเท่ากับ $-1,014$

ตัวอย่าง 6

อนุกรมเลขคณิตหนึ่งมี $S_4 = 28$ และ $S_8 = 48$ จงหาอนุกรมชุดนี้

วิธีทำ

จาก
$$s_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

จะได้
$$s_4 = \frac{4}{2} \{2a_1 + (4-1)(d)\} = 2(2a_1 + 3d)$$

และ
$$s_8 = \frac{8}{2} \{2a_1 + (8-1)(d)\} = 4(2a_1 + 7d)$$

โจทย์กำหนดให้ $S_4 = 28$ และ $S_8 = 48$

ดังนั้น
$$2(2a_1 + 3d) = 28$$

$$2a_1 + 3d = 14 \dots\dots\dots(1)$$

และ
$$4(2a_1 + 7d) = 48$$

$$2a_1 + 7d = 12 \dots\dots\dots(2)$$

ตัวอย่าง 6(ต่อ)

$$(2) - (1), \quad \text{จะได้ } 4d = -2$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

$$\text{แทนค่า } d \text{ ใน (1) จะได้ว่า } 2a_1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 14$$

$$2a_1 = 14 + \frac{3}{2}$$

$$a_1 = \frac{31}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{31}{4}$$

$$\text{ดังนั้นอนุกรมนี้ คือ } \frac{31}{4} + \frac{29}{4} + \frac{27}{4} + \dots$$

อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต และ อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิต เช่น

1) $2 + 4 + 8 + \dots + 512$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 2$ และมี $r = 2$ เป็นอัตราส่วนร่วม

2) $108 + 72 + 48 + \dots + \frac{1024}{243}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 108$ และมี $r = \frac{2}{3}$ เป็นอัตราส่วนร่วม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

ให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตที่มี a_1 เป็นพจน์แรก และมี r เป็นอัตราส่วนร่วม จะได้ว่า

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \dots\dots\dots (1)$$

(1) $\times r$ จะได้ $rS_n = a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} + a_1r^n \dots\dots\dots (2)$

(1) $-$ (2) จะได้ $S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$

$$(1-r)S_n = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ เมื่อ } r \neq 1$$

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต(ต่อ)

อาจเขียนผลบวก n พจน์แรกได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

จาก
$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

$$= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} \cdot r}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1, (a_n = a_1 r^{n-1})$$

ดังนั้น
$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}, r \neq 1$$

หมายเหตุ

$$\begin{aligned} r^{n-1} \cdot r &= r^{n-1+1} \\ &= r^n \end{aligned}$$

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต(ต่อ)

นั่นคือ ถ้าให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตที่มี a_1 เป็นพจน์แรก และมี r เป็นอัตราส่วนร่วม จะได้ว่า $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$ หรือ $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$, $r \neq 1$

ตัวอย่าง 7

จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรม $1 + 3 + 9 + \dots$

วิธีทำ อนุกรมนี้มี $a_1 = 1$, $r = 3$ และ $n = 8$

จาก
$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ เมื่อ } r \neq 1$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a_1(1-r^8)}{1-r} \\ &= \frac{1(1-3^8)}{1-3} \\ &= -\frac{1}{2}(1-3^8) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$S_n = \frac{1}{2}(3^8 - 1) = 3280$$

ตัวอย่าง 8

อนุกรมเรขาคณิต $3 + 6 + 12 + \dots$ มีกี่พจน์ จึงจะมีผลบวกเป็น 3,069

วิธีทำ อนุกรมนี้มี $a_1 = 3$, $r = \frac{6}{3} = 2$ และ $S_n = 3069$

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ดังนั้น $3069 = \frac{3(1-2^n)}{1-2} = -3(1-2^n)$
 $= 3(2^n - 1)$

$$2^n - 1 = \frac{3069}{3} = 1023$$

$$2^n = 1024 = 2^{10}$$

ดังนั้น $n = 10$

ตัวอย่าง 9

กำหนด $a_1 = 3$, $a_7 = 2187$, $r = 3$ จงหา S_7

วิธีทำ จาก $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} S_7 &= \frac{a_1 - a_7 \cdot r}{1 - r} \\ &= \frac{3 - 2187 \cdot 3}{1 - 3} \\ &= 3279 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 10

กำหนด $a_1 = 2$, $r = 5$, $S_n = 312$ จงหา n

วิธีทำ จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ดังนั้น $312 = \frac{2(1-5^n)}{1-5}$

$$1-5^n = (-2) \cdot 312$$
$$= -624$$

$$5^n = 625$$

$$5^n = 5^4$$

ดังนั้น $n = 4$

ตัวอย่าง 11

กำหนด $a_1 = 81$, $a_n = 16$, $S_n = 55$ จงหา n และ r

วิธีทำ จาก $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$ เมื่อ $r \neq 1$

$$\text{ดังนั้น } 55 = \frac{81 - 16 \cdot r}{1 - r}$$

$$55(1 - r) = 81 - 16 \cdot r$$

$$55 - 55r = 81 - 16 \cdot r$$

$$39r = -26$$

$$\text{ดังนั้น } r = -\frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง 11(ต่อ)

หมายเหตุ

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

กำหนด $a_1 = 81$, $a_n = 16$, $S_n = 55$ จงหา n และ r

วิธีทำ จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$16 = 81 \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{16}{81} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}\right)^n &= \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ &= (-1) \left(\frac{2}{3}\right)^5 \end{aligned}$$

$$= (-1)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left(-\frac{2}{3}\right)^5$$

ดังนั้น $n = 5$