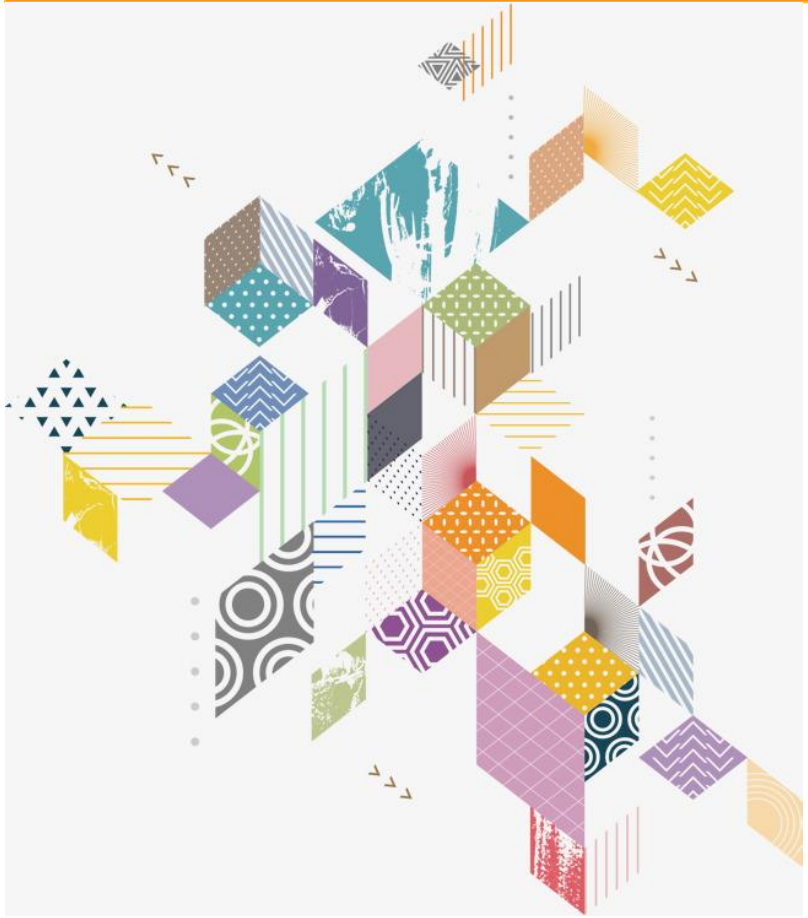
บทที่ 3
การเคลื่อนที่ในหนึ่งและสองมิติ



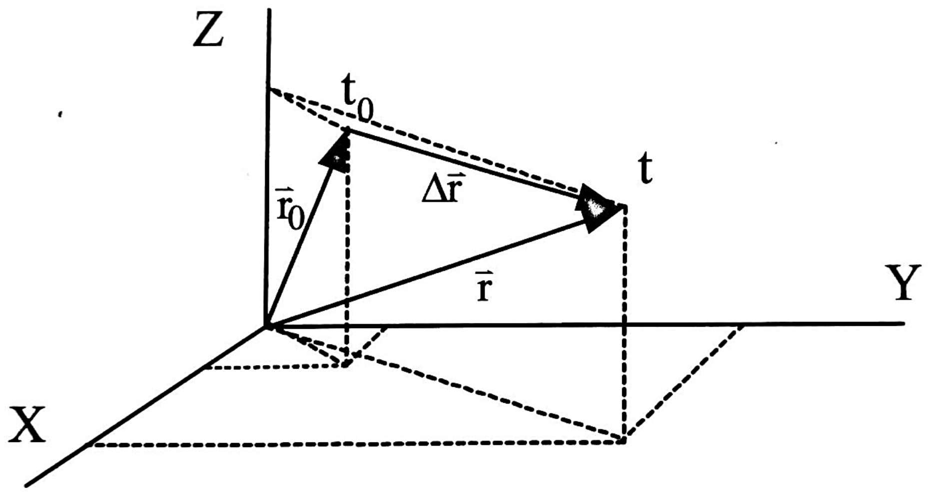
- การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติด้วยความเร่งคงที่
- การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติด้วยความเร่งที่มีค่าเปลี่ยนแปลง
- การเคลื่อนที่ในสองมิติด้วยความเร่งคงที่

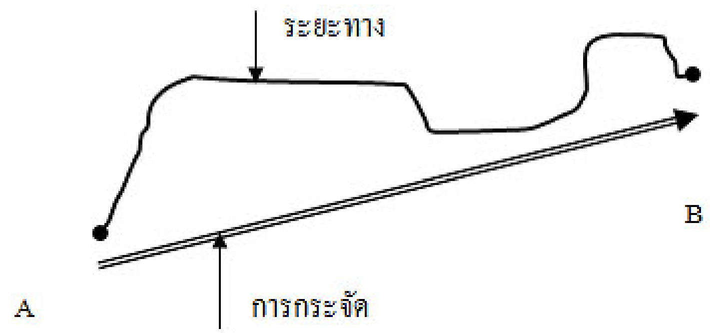
  -การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

ในขั้นแรกที่จะกล่าวถึงในบทนี้คือ พลศาสตร์ (Dynamics) ของอนุภาค โดยจะพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่แบบย้ายตำแหน่ง (Translation) ของอนุภาคในหนึ่งและสองมิติเท่านั้น

สมการพื้นฐานที่จะใช้ในบทนี้ ได้นิยามของ**ความเร็ว** และ**ความเร่ง** ซึ่งความเร็วของอนุภาคหนึ่ง คืออัตราการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาค โดยที่ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลาขณะใดขณะหนึ่ง สามารถบอกได้โดยเวคเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ ในระบบพิกัดฉาก เขียนได้ว่า

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\acute{k} \qquad (3.1)$$





รูปที่ 3.1 เวคเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_0$ และ $\vec{r}$ ของอนุภาคที่เวลา t_0 และ t และเวคเตอร์การขจัดลัพธ์ $\Delta\vec{r}$

ถ้าเวคเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลา t_0 และ t คือ $\vec{r}_0$ และ $\vec{r}$ ตามลำดับ (เมื่อ $t > t_0$) ซึ่งเราสามารถแสดงการเปลี่ยนตำแหน่งได้โดยเวคเตอร์การขจัด (Displacement) $\Delta\vec{r}$ เมื่อ $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ความเร็วเฉลี่ย (Average Velocity) ของอนุภาคในช่วงเวลานี้จึงเขียนได้ดังสมการข้างล่างนี้

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{t-t_0} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

อัตราเร็ว (Speed) ของอนุภาคคือค่าสัมบูรณ์ของ $\vec{v}$ และมักจะเขียนเป็น $|\vec{v}|$ หรือ v ความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะใดขณะหนึ่งมีความแตกต่างกัน

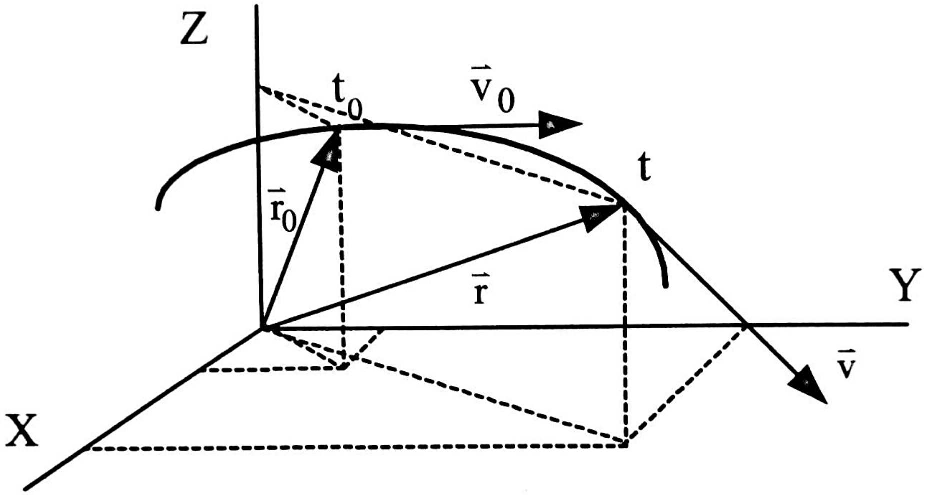
ดังตัวอย่าง กรณีเครื่องบินบินจากเบตง ไปยังกรุงเทพฯ แล้วก็กลับมายังเบตงอีก จะได้ค่าความเร็วเฉลี่ยของเครื่องบินเป็นศูนย์เพราะการขจัดสุทธิมีค่าเป็นศูนย์ ในขณะที่ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งระหว่างการบินไม่เท่ากับศูนย์

ทั้งความเร็วเฉลี่ย $\vec{v}_{av}$ และความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง ต่างเป็นปริมาณเวคเตอร์ โดยมีทิศทางตามทิศของ $\Delta\vec{r}$ ส่วน $\vec{v}$ มีทิศทางตามแนวเส้นสัมผัสของเส้นทางเดินของอนุภาค ซึ่งทั้ง $\vec{v}_{av}$ และ $\vec{v}$ มีมิติเป็น ***ความยาว / เวลา*** เขียนได้ว่า $\frac{L}{T}$

สำหรับความเร่งเฉลี่ย $\vec{a}_{av}$ ของอนุภาคคือ อัตราส่วนของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงกับช่วงเวลา ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (3.3)$$

เมื่อ $\vec{v}_0$ และ $\vec{v}$ เป็นเวคเตอร์ของความเร็วที่เวลา t_0 และ t ตามลำดับ ดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.2 เวคเตอร์ความเร็วเป็นฟังก์ชั่นของเวลา $\vec{v}_0$ และ $\vec{v}$ คือเส้นที่สัมผัสกับทางเดินของอนุภาค

สำหรับความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง $\vec{a}$ ของอนุภาค คือ ลิมิตของความเร่งเฉลี่ย $\vec{a}_{av}$ เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ ซึ่งก็คือความเร่งของอนุภาคที่ ณ จุดใดจุดหนึ่ง เขียนได้ว่า

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

หรือ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3.4)$$

ทั้งนี้ $\vec{a}_{av}$ และ $\vec{a}$ ล้วนแล้วแต่เป็นปริมาณเวคเตอร์ โดยมีทิศตามทิศของการเปลี่ยนแปลง $\Delta \vec{v}$ ความเร่งเชิงเส้น (Linear Acceleration) มีมิติเป็น $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}$

การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติด้วยความเร่งคงที่

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในหนึ่งมิติ กรณีง่ายที่สุดก็คือให้วัตถุเคลื่อนที่ตามแนวแกน x โดยสมมติว่า อนุภาคนั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ และให้ถือว่าความเร่งเฉลี่ยเหมือนกันกับความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง นั่นคือ เวคเตอร์ตำแหน่งของวัตถุ ความเร็ว และความเร่งจึงเขียนได้ว่า

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath}$$

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath}$$

และ

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath}$$

เมื่อ

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}$$

และ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

ฉะนั้น ความเร็วเฉลี่ย และความเร่งเฉลี่ย ในหนึ่งมิติ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$v_{av} = \frac{x-x_0}{t-t_0}$$

และ
$$a_x = \frac{v_x-v_{x0}}{t-t_0}$$

สังเกตว่าทั้งค่า $\vec{v}_{av}$ และ a_x ไม่ได้เขียนในรูปของเวคเตอร์หน่วย โดยละไว้ในฐานที่เข้าใจ เพื่อความสะดวกจะใช้ $\vec{v}_{av}$ เป็นบวกถ้ามีทิศไปทาง +x และเป็นลบเมื่อ $\vec{v}_{av}$ มีทิศไปทาง −x ทำนองเดียวกันจะใช้กรณีเดียวกันนี้กับ x และ a_x ด้วย

และถ้า ณ ตำแหน่งเริ่มต้น x_0 และความเร็วเริ่มต้น v_{x0} ที่เวลา $t_0 = 0$ สมการข้างบนทั้งสองก็จะกลายเป็น

$$x = x_0 + v_0 t$$

และ $$v_x = v_{x0} + a_x t \tag{3.5}$$

อย่างไรก็ตาม จากนิยามความเร็วเฉลี่ย คือ

$$v_{av} = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)$$

ดังนั้น สมการการขจัดก็จะกลายเป็น

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t \tag{3.6}$$

อย่างไรก็ตาม จากนิยามความเร็วเฉลี่ย คือ

$$v_{av} = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)$$

ดังนั้น สมการการขจัดก็จะกลายเป็น

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t \qquad (3.7)$$

แทนค่า v_x จากสมการ (3.5) ลงใน (3.6) จะได้ว่า

$$x = x_0 + v_{x0} + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (3.8)$$

ในที่สุดใช้ t จากสมการ (3.7) แทนลงในสมการ (3.6) ก็จะได้

$${v_x}^2 = {v_{x0}}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad (3.9)$$

ปัญหาอีกอันหนึ่งที่น่าสนใจในกรณีการเคลื่อนที่เช่นนี้ ก็คือการที่วัตถุตกอย่างอิสระภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลก ถ้าตัดความต้านทานของอากาศออกไป และสมมติว่าความเร่งของวัตถุเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ ด้วยความเร่งคงที่ แต่ว่าเป็นหนึ่งมิติในทิศทางตามแนวแกน y โดยจะแทน x ด้วย y ส่วนตัวห้อยก็เปลี่ยน x เป็น y เช่นกัน สำหรับ a_y ให้เท่ากับ $-g$ ถ้า y มีทิศขึ้นข้างบนให้เป็น + ความเร่ง g มีทิศดิ่งลงสู่พื้นโลกเสมอ ดังนั้นจากสมการ (3.5) ถึง (3.8) ก็จะกลายเป็น

$$v = u + at \tag{3.10}$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \tag{3.11}$$

$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \tag{3.12}$$

$$v^2 = u^2 + 2as \tag{3.13}$$

v = ความเร็ว m/s

u = ความเร็วต้น m/s

a = ความเร่ง m/s^2

s = ระยะทาง m

t = เวลา s

Example3.1

เครื่องบินเมื่อเริ่มสัมผัสพื้นแล่นด้วยอัตราเร็ว 321.18 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และมีอัตราเร็วลดลงคงที่จนกระทั่งมีอัตราเร็วเป็น 32.18 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ได้ระยะทาง 365.85 เมตร จงหา

ก) ขนาดและทิศทางของความเร่ง และ

ข) หาเวลาที่ผ่านไปทั้งหมด

วิธีทำ

$$v = u + at \qquad (3.10)$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11)$$

$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \qquad (3.12)$$

$$v^2 = u^2 + 2as \qquad (3.13)$$

Example3.2

นักศึกษาคนหนึ่งต้องการที่จะใช้ประโยชน์จากกฎของการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่งคงที่ จึงทำให้ลูกมะม่วงหล่นจากยอดตึกสูง โดยให้เพื่อนนักศึกษาอีกคนที่อยู่ข้างล่าง จับเวลาได้ 2.5 วินาที เมื่อลูกมะม่วงตกถึงพื้น จงหาว่าตึกสูงกี่เมตร และความเร็วของลูกมะม่วงขณะกระทบพื้น

วิธีทำ

$$v = u + at \qquad (3.10)$$

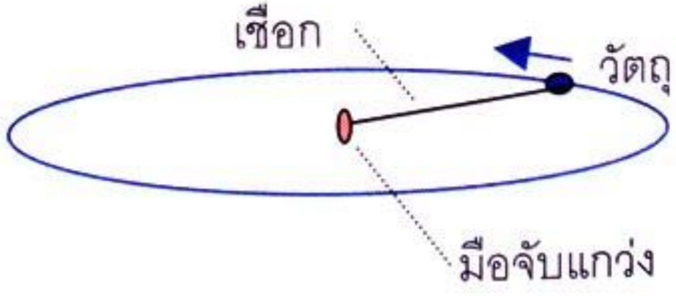
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11)$$

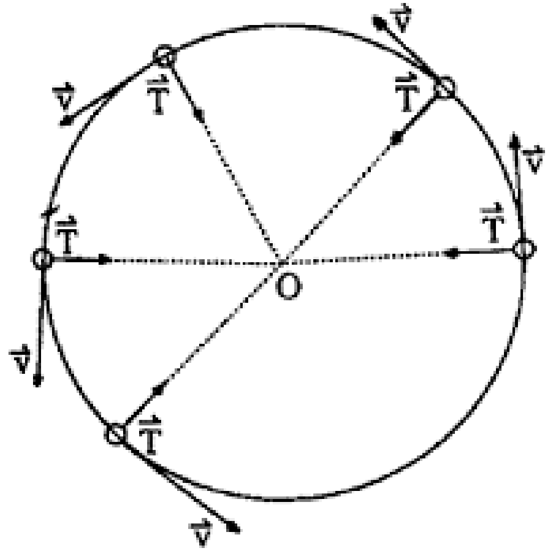
$$s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \qquad (3.12)$$

$$v^2 = u^2 + 2as \qquad (3.13)$$

การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติด้วยความเร่งที่มีค่าเปลี่ยนแปลง

เมื่อใดก็ตามถ้าตำแหน่งของอนุภาคเป็นฟังก์ชั่นของเวลา (t) และกำลังของ t มีค่ามากกว่า 2 หรือ bn^2 (เมื่อ n >2) แล้ว การเคลื่อนที่ของอนุภาคจะมีความเร่งขึ้นกับเวลา ตัวอย่างในเรื่องนี้ได้แก่ กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมที่มีขนาดความเร็วคงที่ แต่ทิศทางของความเร็วนั้นเปลี่ยนไปเมื่ออนุภาคเปลี่ยนตำแหน่ง





Example3.3

ตำแหน่งของอนุภาคหนึ่งที่กำลังเคลื่อนที่ตามแนวแกน x ขึ้นกับเวลา และเป็นไปตามนิพจน์ข้างล่างนี้

$$x = 5t^2 - 2t^3$$

เมื่อ x มีหน่วยเป็นเมตร (m) และ t มีหน่วยเป็นวินาที (s)

จงหา ก) ความเร็วและความเร่งของอนุภาคที่เป็นฟังก์ชั่นของเวลา

ข) ระยะเวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ไกลที่สุด

ค) การขจัดเมื่อเคลื่อนที่ไป 2 วินาทีแรก

วิธีทำ

ก) ความเร็วและความเร่ง สามารถใช้สมการ (3.2) และ (3.4) ได้ซึ่งในหนึ่งมิติ คือ

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{และ} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

โดยการหาอนุพันธ์ของ x จะได้

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[5t^2 - 2t^3]$$

$$= 10t - 6t^2$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[10t - 6t^2]$$

$$= 10 - 12t$$

วิธีทำ (ต่อ)

ข) เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ไกลสุด คือ v_x = 0 (นั่นคืออนุภาคจะหยุด) ดังนั้นจาก v_x ในข้อ (ก) จะได้

$$10t - 6t^2 = 0$$

$$t(10 - 6t) = 0$$

ได้ t สองค่าคือ t = 0 คือเวลาเมื่อเริ่มเคลื่อนที่ และ $t = \frac{5}{3}$ วินาที คือเวลาที่อนุภาคมีความเร็ว $v_x = 0$

ค) ตำแหน่งของอนุภาคในช่วงเวลา t = 2 วินาทีแรก คือ

$$x(t = 2) = 5(2)^2 - 2(2)^3$$

$$= 4 \text{ m}$$

การเคลื่อนที่ใน 2 มิติด้วยความเร่งคงที่
- การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

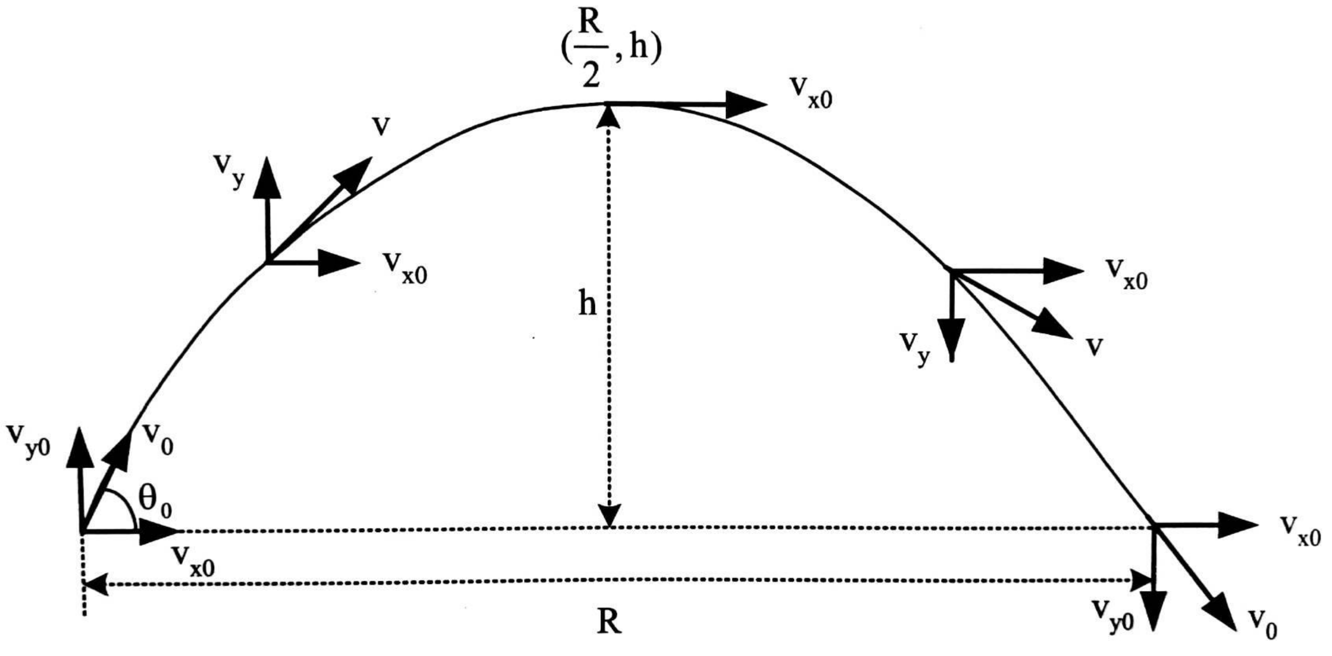
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคใน 2 มิติ ที่มีความเร่งคงที่ ตัวอย่างในเรื่องนี้คือการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง (Projectile) ในสนามโน้มถ่วงของโลก (Earth's gravitational field) เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจจะสมมติว่า

1) ผิวโลกไม่มีความโค้ง

2) ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง มีค่าคงที่ ณ ความสูงต่าง ๆ และ

3) ไม่คิดความต้านทานของอากาศ

พิจารณาอนุภาคเคลื่อนที่วิถีโค้งบนระนาบ xy โดย x เป็นแนวระดับ และ y เป็นความสูงที่ตั้งฉากกับผิวโลก โดยที่อนุภาคมีความเร็วต้นเป็น $\vec{v}_0$ ทำมุม θ_0 กับแนวระดับ ดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.4 วิถีของโปรเจคไตล์

ถ้าจุดกำเนิด (0,0) เป็นตำแหน่งที่อนุภาคเริ่มเคลื่อนที่นั่นคือ $\vec{r}_0 = 0$ และ $t_0 = 0$ ความเร่ง $\vec{a}$ ในแนวแกน x จึงไม่มี จะมีเฉพาะตามแนวแกน y คือ $\vec{a} = -g\,\hat{\jmath}$ นั่นคือความเร่งของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ มีค่าเช่นเดียวกับ การตกอย่างอิสระ

ในเมื่อ $\vec{v} = x_y\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$ จึงสามารถเขียนองค์ประกอบของสมการ จะได้ว่า

$$v_x = v_{x0} \qquad (3.14)$$

$$v_y = v_{x0} - gt \qquad (3.15)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$ และองค์ประกอบสมการ สามารถเขียนได้ว่า

$$x = v_{x0}t \qquad (3.16)$$

$$y = v_{y0} + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3.17)$$

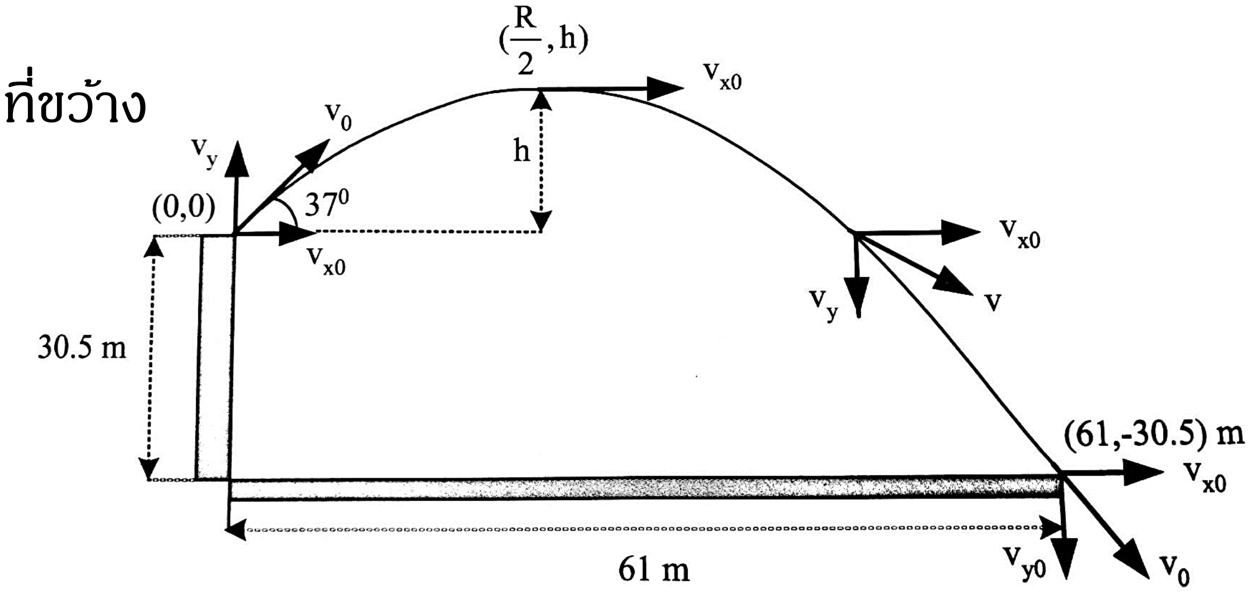
Example3.4

ขว้างก้อนหินจากจุดยอดของหน้าผาแห่งหนึ่งทำมุม 37° ดังแสดงในรูปที่ 3.5 หน้าผาอยู่เหนือน้ำ 30.5 เมตร และก้อนหินกระทบน้ำห่างจากหน้าผาตามแนวราบ 61 เมตร จงหา

ก) ระยะเวลาที่ก้อนหินลอยอยู่ในอากาศจากเริ่มขว้างจนกระทบผิวน้ำ

ข) อัตราเร็วเริ่มต้นของก้อนหิน

ค) ระยะสูงสุดของก้อนหินนับจากระดับที่ขว้าง



รูปที่ 3.5

วิธีทำ

ก) ให้ตำแหน่งเริ่มต้น (0,0) ขว้างก้อนหินจากจุดยอดของหน้าผา โดยอาศัยสมการ (3.16) และ (3.17) เพื่อที่จะหาระยะเวลาที่ก้อนหินลอยอยู่ในอากาศ (t) เมื่อตำแหน่งของก้อนหินกระทบน้ำคือ (61, -30.5) เมตร ฉะนั้นจะได้ว่า

$$61 = v_0 \cos(37^\circ)\, t$$

และ
$$-30.5 = v_0 \sin(37^\circ)\, t - 4.9t^2$$

จาก v_0 ของสมการแรก แทนลงในสมการที่สอง จะได้

$$-30.5 = 61 \tan(37^\circ) - 4.9\, t^2$$
$$= 61\,(\tan 37^0) - 4.9\, t^2$$
$$= 61 \times 0.8 - 4.9\, t^2$$
$$= 48.8 - 4.9\, t^2$$
$$4.9\, t^2 = 48.8 + 30.5$$
$$= 79.3$$
$$t = 4.02 \text{ วินาที}$$

วิธีทำ (ต่อ)

ข) หาความเร็วต้น (v_0)โดยใช้ t จากข้อ (ก) แทนลงในสมการแรกของข้อ (ก) จะได้

$$61 = v_0 \cos(37^\circ)\, t$$

$$v_0 = \frac{61}{(\cos 37^\circ)(4.02)} \text{ m/s}$$

$$= \frac{61}{(0.765)(4.02)} \text{ m/s}$$

$$= 19.8 \text{ m/s}$$

ค) เมื่อทั้ง θ_0 และ v_0 รู้ค่าแล้ว อาศัยสมการที่ (3.21) จึงสามารถหาระยะสูงสุดของก้อนหินได้

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$= \frac{(19.8)^2 (\sin 37^\circ)^2}{2(9.8)} \text{ m}$$

$$= 8.3 \text{ m}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

เมื่อสังเกตอนุภาคตัวหนึ่ง พบว่าที่เวลา $t = 0$ อยู่ตำแหน่ง $x_0 = 5\ m$ และกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}_0 = 20\ m/s$ ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความหน่วง และเมื่อเวลาผ่านไป $10\ s$ อนุภาคมีความเร็ว $\vec{v} = 2\ m/s$ จงหาความเร่งตำแหน่งที่เป็นฟังก์ชั่นของเวลา และอนุภาคจะใช้เวลาเคลื่อนที่นานเท่าไรจึงเคลื่อนที่กลับไปที่ตำแหน่ง $x = 5\ m$