บทที่ 5

งานและพลังงาน (Work and Energy)

- งานที่ทำโดยแรงคงที่
- งานกรณีทั่วไป
- ความสัมพันธ์ระหว่างงานและพลังงานจลน์
- พลังงานศักย์ยืดหยุ่น
- กำลัง (Power)

งานที่ทำโดยแรงคงที่

แนวคิดของงานได้กำหนดขึ้นโดยนักฟิสิกส์ เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายสุด ก็คือการนิยามงานกรณีที่เกิดจากแรงที่มีค่าคงที่หนึ่ง ($\vec{F}$) กระทำต่อวัตถุหนึ่ง ซึ่งงานและพลังงานมีความสัมพันธ์กัน เป็นทฤษฎีที่สำคัญอีกอันหนึ่ง ฉะนั้น ถ้าวัตถุหนึ่งมีการขจัด ($\vec{S}$) จากการกระทำของแรงคงที่ค่านี้แล้ว งานที่ทำจึงนิยามไว้โดย

$$W = \vec{F} \bullet \vec{S} \qquad (5.1)$$

เมื่อ W คือ งาน มีหน่วยเป็นจูล (J) หรือนิวตันเมตร (N–m)

F คือ แรงที่กระทำ มีหน่วยเป็นนิวตัน (N)

s คือ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวราบ มีหน่วยเป็นเมตร (m)

เนื่องจาก W นิยามโดยผลคูณสเกลาร์ งานจึงเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งมีหน่วยเป็น (N–m)

แรงที่มีค่าคงที่ ($\vec{F}$) ตามสมการ (5.1) นั้น จะต้องไม่เท่ากับศูนย์และต้องมีองค์ประกอบในทิศทางของการขจัด ($\vec{S}$) นั้นด้วย ฉะนั้นเมื่อ $\vec{F}$ ตั้งฉากกับ $\vec{S}$ งานที่ทำโดย $\vec{F}$ เป็นศูนย์ ทำนองเดียวกัน ถ้าวัตถุไม่เคลื่อนที่เลย แม้จะถูกกระทำด้วยแรง $\vec{F}$ นี้ งานที่ทำก็มีค่าเป็นศูนย์เช่นกัน เพราะว่า $\vec{S} = 0$ ดังนั้น สมการที่ (5.1) มักจะเขียนอยู่ในรูป

$$W = Fs\,cos\theta \qquad (5.2)$$

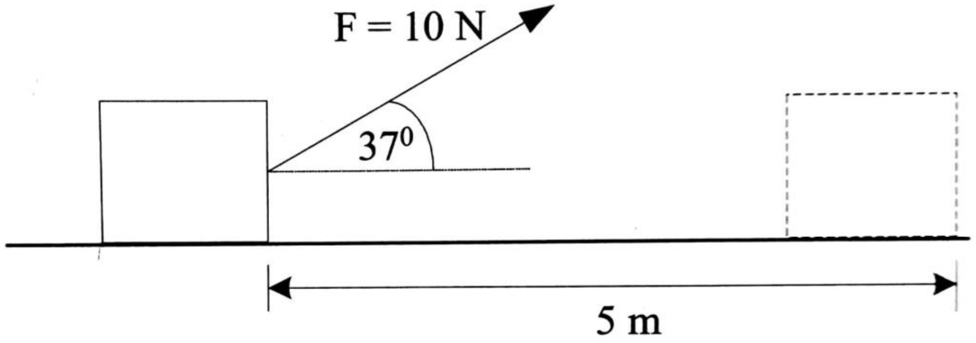
เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{F}$ และ $\vec{S}$

Example5.1

แรงหนึ่งแรงมีขนาด 10 นิวตัน กระทำต่อลังไม้ในทิศที่ทำมุม 37° กับแนวระดับดังรูป ทำให้ลังไม้เคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง 5 เมตร

ก) จงหางานที่ทำโดยการกระทำของแรง 10 N นี้

ข) สมมติถ้ามีแรงเสียดทานขนาด 5 N ในทิศ $-x$ จงหางานที่ทำจากแรงนี้



วิธีทำ

ก) จาก $W = Fs\ cos\theta$

$$= 10N\ (5m)cos37°$$

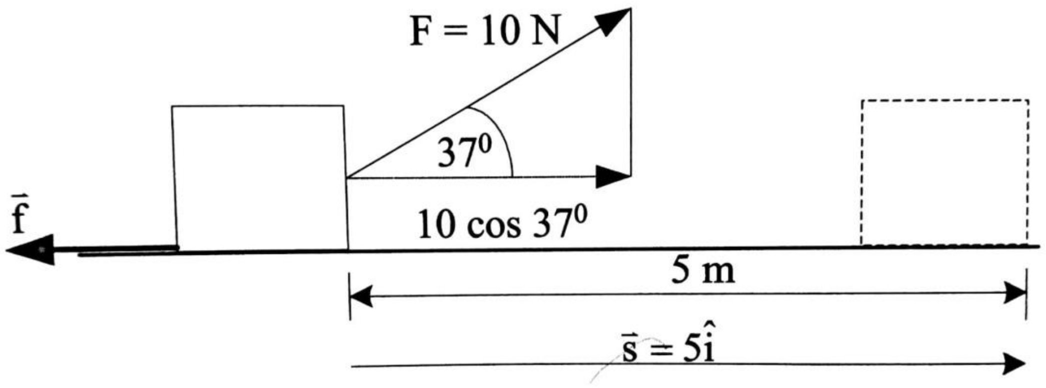
$$= 40N - m$$

$$= 40\ J$$

ข) ในกรณีนี้ แรงเสียดทานมีทิศทาง −x ซึ่งตรงข้ามกับ $\vec{S}$ นั่นคือ

$$\vec{f} = 5(-\hat{\imath})\ N$$

$$\vec{S} = 5\hat{\imath}\ \mathrm{m}$$



จาก $W = \vec{F} \bullet \vec{S}$

แทนค่าจะได้ $W_f = 5(-\hat{i}) \bullet 5\hat{i}$

$= -25$ N-m

$= -25$ J

หรือจาก $W = Fs \cos\theta$

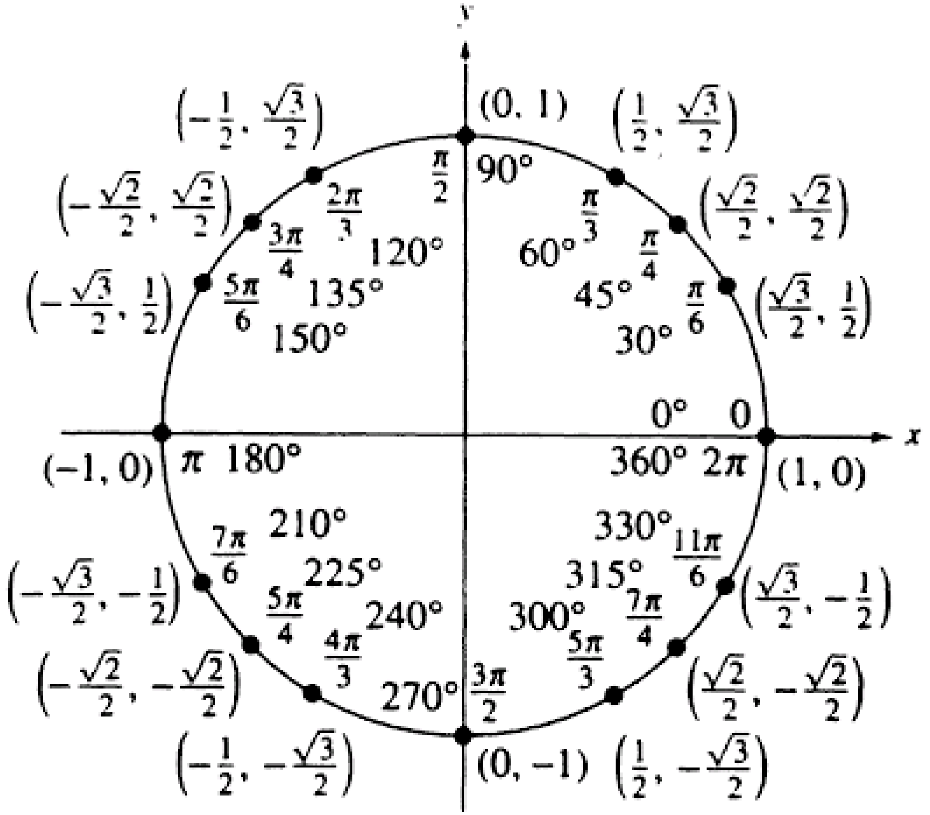
แทนค่า $W_f = fs \cos\pi$

$= fs(-1)$

$= -5\ N\ (5m)$

$= -25$ N.m

$= -25$ J



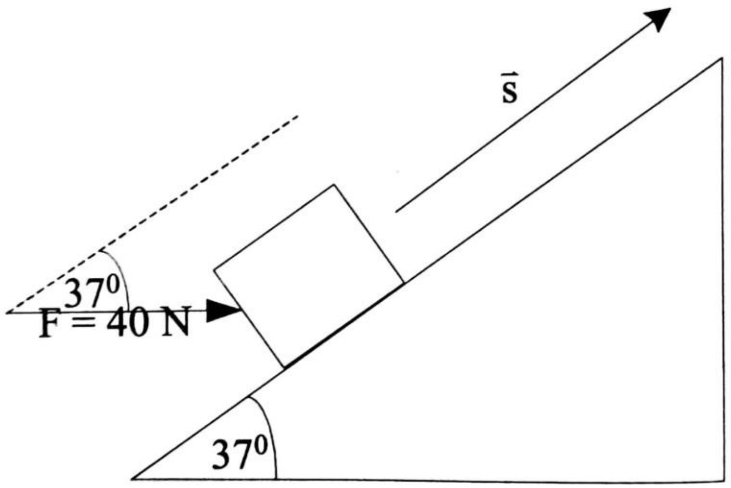
Example 5.2

กล่องมวล 3 กิโลกรัม ถูกผลักขึ้นไปตามพื้นเอียงระยะทาง 2 m ด้วยแรงขนาด 40 N ในทิศตามแนวระดับดังรูป ถ้าให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานขณะเลื่อนขึ้นเท่ากับ 0.1 และพื้นเอียงทำมุมกับแนวระดับ 37°

ก) งานที่ทำโดยแรงขนาด 40 N นี้

ข) งานที่ทำเนื่องจากแรงโน้มถ่วง

ค) งานที่ทำเนื่องจากความเสียดทาน

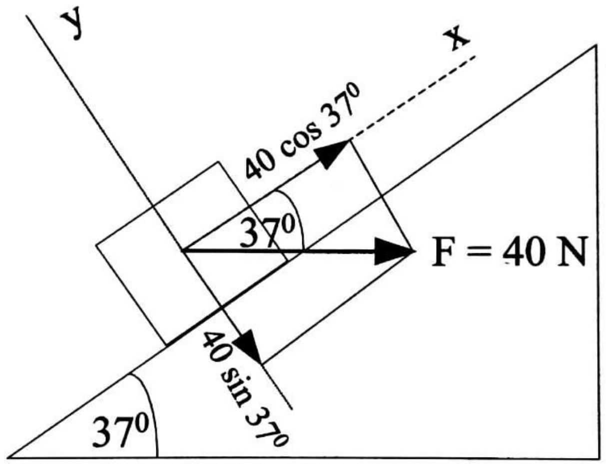


ก) เขียนภาพอิสระของแรง 40 N

จากรูปได้ $\vec{F} = 40 \cos 37^{o} \ \hat{i} + 40 \sin 37^{o} \ \hat{j}$ N

$\vec{S} = 2 \ \hat{i}$

ฉะนั้นจาก $W = \vec{F} \bullet \vec{S}$



แทนค่าได้ $W_F = [(40\cos37^{o}\,\hat{i} + 40\sin37^{o}\,\hat{j}) \bullet 2\,\hat{i}]$ N-m

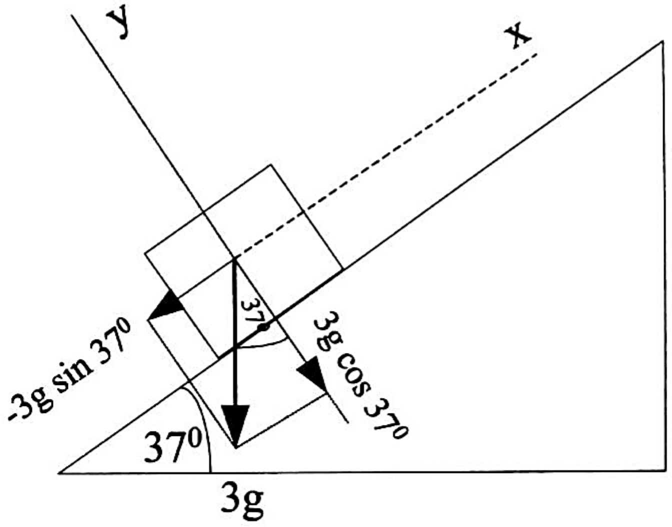
$= (40 \cos 37^{o})(2)$ N-m

$= (40)(2)(0.8)$ N-m

$W_F = 64$ N.m

$= 64$ J

ข) น้ำหนัก $\vec{W} = m\vec{g} = 3\vec{g}$ สามารถแยกองค์ประกอบได้ดังแผนภาพอิสระ ดังนี้



จากรูปได้ $\vec{F} = 3g\cos 37^o(-\hat{i}) + 3g\sin 37^o(-\hat{j})$ N

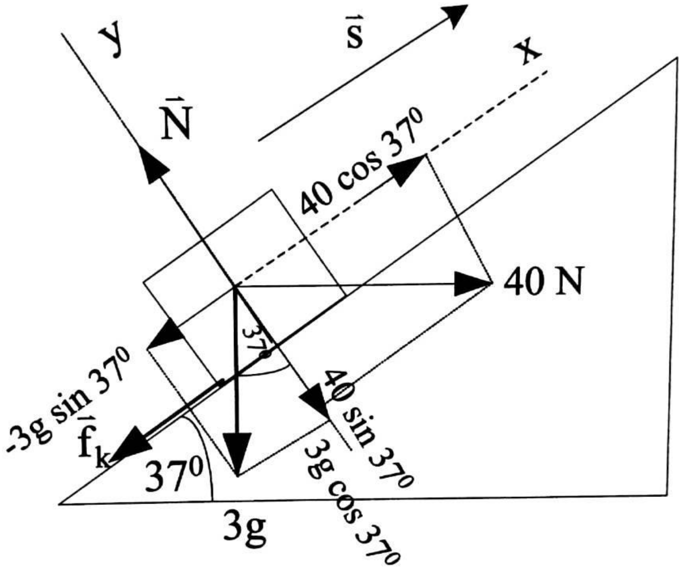
ฉะนั้นจาก $W = \vec{F} \bullet \vec{S}$

แทนค่า $W_g = [3g\cos 37^o(-\hat{i}) + 3g\sin 37^o(-\hat{j})] \bullet [2\hat{i}]$ N-m

$= -3(9.8)$ N $(0.6)(2)$ m

$= -35$ J

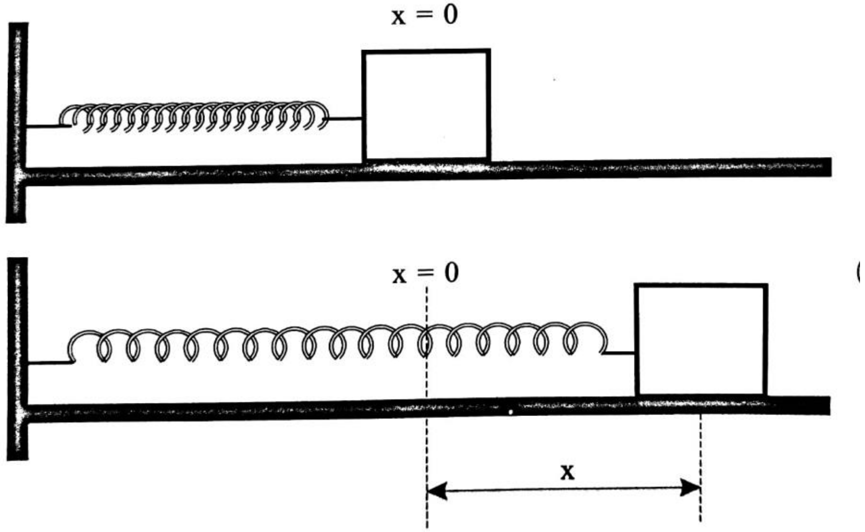
ค) จากแรงเสียดทานสูงสุดคือ $f_k = \mu_k N$ เขียนแผนภาพอิสระของแรง คือ

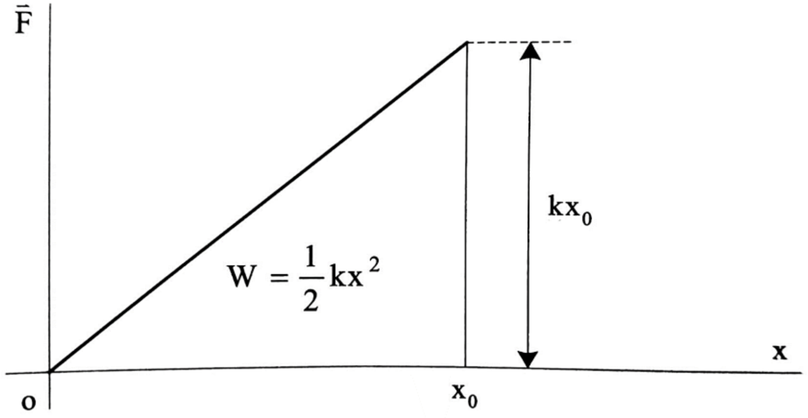


ได้	N	$=$	$3g\cos 37^{o} + 40\sin 37^{o}$
		$=$	$47.6\ \text{N}$
$\therefore$	f_k	$=$	$(0.1)(47.6\ \text{N})$
		$=$	$4.8\ \text{N}$
แต่	$\vec{f}_k$	$=$	$f_k(-\hat{i})$
		$=$	$4.8(-\hat{i})\ \text{N}$
และ	$\vec{S}$	$=$	$2\hat{i}\ \text{m}$
ฉะนั้นจาก	W	$=$	$\vec{F}\bullet\vec{S}$
แทนค่าได้	W_f	$=$	$4.8(-\hat{i})\bullet 2\hat{i}\ \text{N-m}$
		$=$	$-9.6\ \text{N.m}$
		$=$	$-9.6\ \text{J}$

งานกรณีทั่วไป

ตัวอย่างของระบบหนึ่ง เมื่อแรงมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของอนุภาค ในตัวอย่างนี้แรงของสปริงเป็นไปตามกฎของฮุกส์ (Hook's Law) นั่นคือ $F_s = -kx$ ซึ่งแรงภายนอก $\vec{F}$ อย่างน้อยที่สุดต้องเท่ากับ และมีทิศตรงข้ามกับ F_s จึงทำให้มวล m เคลื่อนที่จากสมดุล

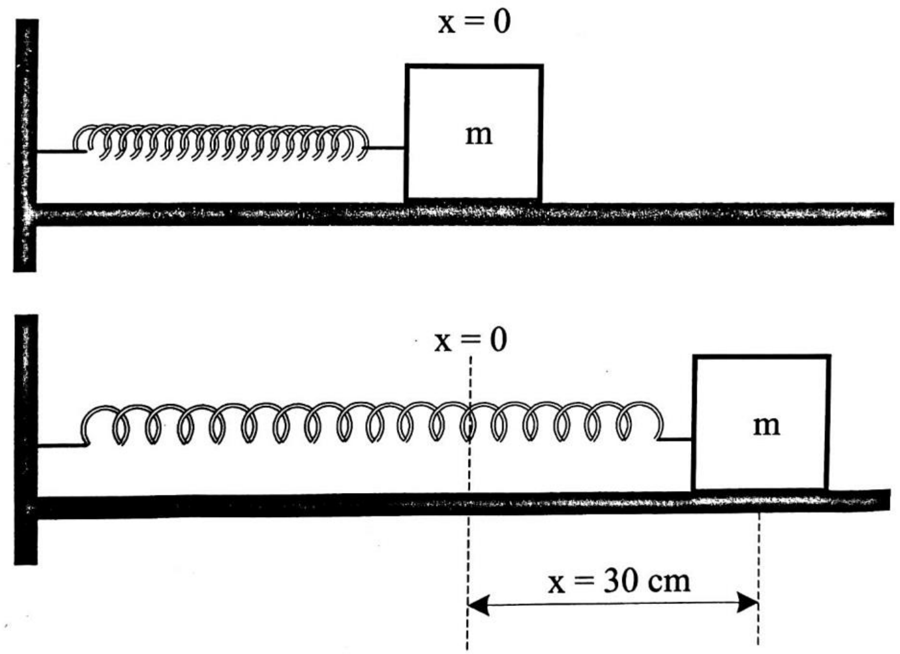




งานที่ทำในการยืดสปริงคือ พื้นที่ใต้โค้งของ F และ x

Example5.3

สปริงตัวหนึ่งมีค่านิจเท่ากับ 50 นิวตันต่อเมตร ผูกติดกับมวลซึ่งวางนิ่งอยู่บนพื้นราบเกลี้ยง ดังรูป เมื่อเริ่มต้นดึงสปริงให้ยืดออกถึงตำแหน่ง $X_A = 30$ เซนติเมตร แล้วปล่อยให้สปริงดึงมวลให้เคลื่อนที่ถึงตำแหน่ง $X_B = 5$ เซนติเมตร จงหางานที่สปริงกระทำต่อมวลนี้

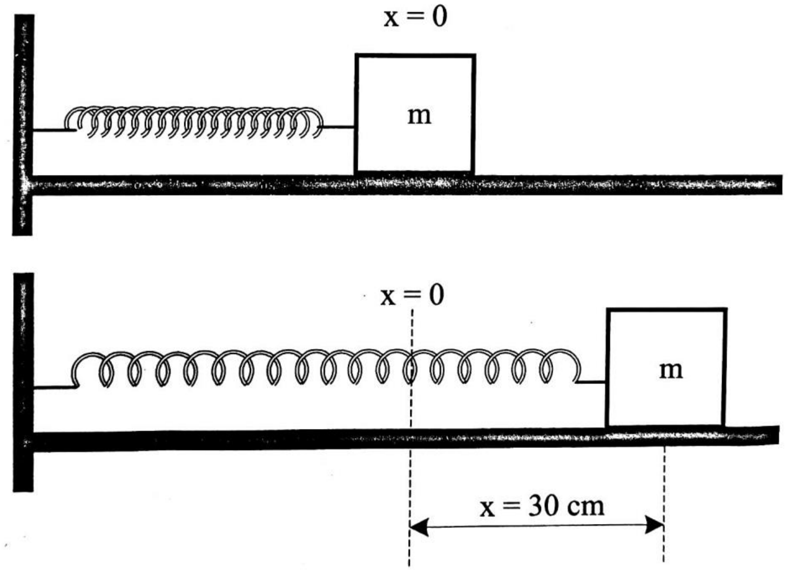


วิธีทำ

แรงดึงของสปริงแปรตามระยะทางที่สปริงยืดออก

จากสมการ $F = -kx$

ดังนั้นงานที่สปริงทำได้คือ



$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$= \frac{1}{2}k(x_A{}^2 - x_B{}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(50\frac{N}{m})[(0.3m)^2 - (0.05m)^2]$$

$$= 2.188 \text{ จูล}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างงานและพลังงานจลน์

พลังงานจลน์ (K) ของอนุภาคมวล m อนุภาคหนึ่ง และมีความเร็วเป็น $\vec{v}$ (โดยที่ $\vec{v} \ll c$) ซึ่งนิยามไว้โดย

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v} \bullet \vec{v}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 \qquad (5.3)$$

โดยนิยามนี้ถือได้ว่า พลังงานจลน์ คือรูปแบบหนึ่งของพลังงาน ขณะที่วัตถุเคลื่อนที่

พลังงานจลน์ก็เหมือนกับงาน เป็นปริมาณสเกลาร์ และมีหน่วยเช่นเดียวกัน เมื่อแรงลัพธิ์กระทำต่อวัตถุหนึ่งไม่เป็นศูนย์ และเห็นได้ชัดว่าวัตถุนั้น มีความเร่งหรือความหน่วง ในขณะที่ความเร็วของวัตถุเปลี่ยนแปลง ฉะนั้นพลังงานจลน์ของวัตถุก็เปลี่ยนไปเช่นกัน

งานที่ทำโดยแรงลัพธ์จากภายนอกกระทำต่อวัตถุมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของวัตถุ ซึ่งต่อไปจะเรียกว่า ***ทฤษฎีงาน-พลังงาน*** (Work – Energy Theorem) ซึ่งทฤษฎีนี้ใช้ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ได้อย่างกว้างขวาง และสามารถเขียนเป็นสมการโดยพิจารณาจาก

$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

จะได้ว่า
$$W = K - K_0 \qquad (5.4)$$

เมื่อ $\vec{F}$ คือแรงลัพธ์จากภายนอกกระทำต่อวัตถุ

K และ K_0 เป็นพลังงานจลน์ตอนต้นและตอนปลายของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

โดยที่
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

และ
$$K_0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \qquad (5.5)$$

บางครั้งสมการ (5.4) มักจะเขียนว่า

$$W = \Delta K \qquad (5.6)$$

สมการ (5.6) นี้เรียกว่า ***ทฤษฎีงาน-พลังงาน*** และจะเห็นว่าถ้าพลังงานจลน์ของวัตถุเพิ่มขึ้น W ก็จะมีค่าเป็นบวก ขณะที่พลังงานจลน์ของวัตถุลดลง งานก็จะมีค่าเป็นลบ ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าถ้าแรงลัพธ์จากภายนอกกระทำต่อวัตถุในทิศตามทิศของการขจัดซึ่งมีผลทำให้ความเร็วของวัตถุเพิ่มขึ้น งานที่ได้ก็จะเป็นบวก เมื่องานมีค่าเป็นลบ แรงลัพธ์จากภายนอกก็จะทำต่อวัตถุในทิศที่ตรงข้าม กับทิศของการขจัด ผลทำให้วัตถุมีความเร็วลดลง ทำให้พลังงานจลน์สูญเสียไป ทำนองเดียวกันถ้า $W = 0$ ก็เนื่องจากแรงลัพธ์มีค่าเท่ากับศูนย์การเปลี่ยนแปลงพลังงานเป็นศูนย์นั่นเอง

*Example*5.4

แรงคงที่ขนาด 5 N กระทำต่อวัตถุมวล 4 kg จากหยุดนิ่ง ณ จุดเริ่มต้นที่ $t = 0$ และเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง 2 เมตร

ก) จงหาความเร็วสุดท้ายของมวล 4 kg โดยใช้ทฤษฎีงาน-พลังงาน

ข) จงตรวจสอบผลลัพธ์จากข้อ (ก) โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่งคงที่

วิธีทำ

ก) จาก $W = \Delta K$

$= K - K_0$

$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

เมื่อ $W = F_x x$

$= (5\ N)(2\ m)$

$= 10\ J$

$v_0 = 0$; ได้ $\frac{1}{2}mv_0^2 = 0$

และ $m = 4\ kg$

ฉะนั้น $10\ J = \frac{1}{2}(4kg)v^2 + 0$

$v = \sqrt{\frac{2x10J}{4kg}}$

$= \sqrt{5\frac{Nm}{kg}}$

$= \sqrt{5\frac{kgm^2/s^2}{kg}}$

$= \sqrt{5}\ m/s$

ข) จาก $v^2 = v_0^2 + 2ax$

$= 0 + 2\frac{F}{m}x$

$v^2 = 2(\frac{5N}{4kg})\ 2\ m$

$= 5\ m^2/s^2$

ฉะนั้น $v = \sqrt{5}\ m/s$

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น

แรงในธรรมชาติแบ่งได้ 2 ประเภท ได้แก่ แรงอนุรักษ์ (Conservative) และแรงไม่อนุรักษ์ (Non-Conservative) และการที่จะกล่าวได้ว่า แรงใดเป็นแรงอนุรักษ์ นั้นงานที่ทำโดยแรงนั้น ๆ ต่อวัตถุหนึ่ง ในแนวเส้นทางปิด (Close Path) มีค่าเป็นศูนย์ นอกจากนี้งานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ระหว่างจุด 2 จุด เช่น จุด a และจุด b ไม่ขึ้นกับทางเดิน ตัวอย่างเช่น แรงคืนตัวของสปริง แรงโน้มถ่วง แรงไฟฟ้าสถิตระหว่างอนุภาคที่มีประจุ 2 อนุภาค

สำหรับแรงไม่อนุรักษ์ คือแรงที่ทำให้เกิดงานโดยแรงนั้นในทางเดินปิดมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ฉะนั้นงานที่ทำโดยแรงไม่อนุรักษ์ต่ออนุภาคหนึ่งให้เคลื่อนจากจุด a ไปยัง b ขึ้นอยู่กับทางเดิน ตัวอย่างที่เห็นได้โดยทั่วไปก็คือแรงเสียดทาน นั่นเอง

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (Elastic Potential Energy) ของสปริง เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $U(x)$

นั่นคือ $$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (5.7)$$

สังเกตว่า พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงเป็นศูนย์ เมื่อ $x = 0$ แสดงว่า สปริงอยู่ในสมดุล และ $U(x)$ จะมีค่ามากที่สุด เมื่อสปริงยืดออกมากที่สุด หรือหดมากที่สุด นอกจากนี้ $U(x)$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอ และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ x^2 และ k รวมทั้งเป็นปริมาณสเกลาร์เช่นเดียวกับงาน และพลังงานจลน์ และมีหน่วยเช่นเดียวกันด้วย

กฎอนุรักษ์พลังงานกล (Law of Conservation of mechanical Energy) สำหรับมวลที่ติดปลายสปริง เมื่อจัดสมการใหม่ คือ

$$W = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) - (\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}kx_0^2)$$

ให้ $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ เรียกว่า พลังงานกลตอนปลาย

$E_0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$ เรียกว่า พลังงานกลตอนต้น

ดังนั้นจะได้

$$W = E - E_0 \qquad (5.8)$$

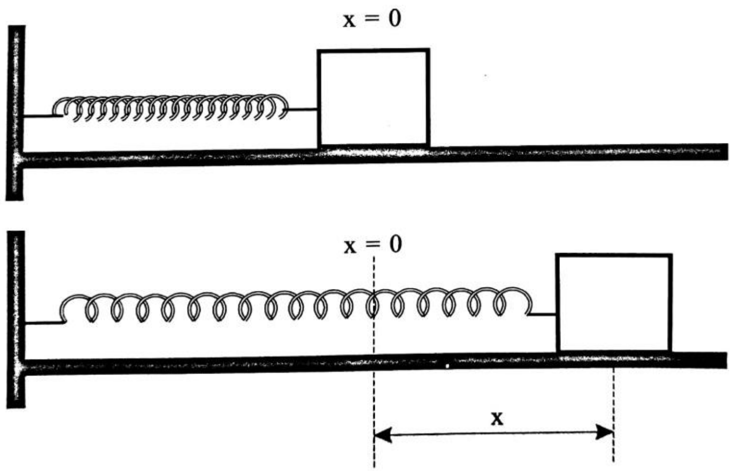
ฉะนั้นถ้า W เป็นบวกพลังงานกลเพิ่มขึ้น และถ้า W เป็นลบ แสดงว่าพลังงานกลลดลง (เช่นกรณีการเคลื่อนที่มีแรงเสียดทาน) ถ้า $W = 0$ แสดงว่าพลังงานกลมีค่าคงที่หรือมีค่าคงตัว

Example5.5

มวล 0.2 kg วางอยู่บนพื้นผิวแนวราบติดที่ปลายสปริง ที่มีค่าคงที่ของสปริงเป็น 20 N/m มวลถูกดึงจากตำแหน่งสมดุลโดยแรงจากภายนอกไปได้ระยะทาง 20 cm และแล้วก็ปล่อยจากหยุดนิ่ง สมมุติว่าพื้นเกลี้ยงไม่มีความเสียดทาน จงคำนวณหาอัตราเร็ว เมื่อมวลเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่งสมดุล

วิธีทำ

ทันทีที่ปล่อยมวล ขณะนี้ไม่มีแรงจากภายนอกกระทำต่อระบบ (มวล+สปริง) จะมีแต่เฉพาะแรงที่สปริงดึงตัวกลับ (Restoring Force) ซึ่งถือว่าเป็นแรงภายในของระบบ ฉะนั้นสามารถใช้สมการกับเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x_0 = 20\ cm = 0.2\ m,\ x = 0$ และ $v_0 = 0$



จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^{\ 2}$$

$$v^2 = \frac{k}{m}x_0^{\ 2}$$

$$v = \frac{20N/m}{0.2kg}(0.2m)^2$$

$$v = 2\ \ m/s$$

กำลัง (Power)

กำลังนิยามจากอัตราการที่พลังงานถูกเปลี่ยนถ่ายจากระบบหนึ่งไปสู่อีกระบบหนึ่ง ถ้าให้ P เป็นกำลัง จะได้

$$P = \frac{dE}{dt}$$

ถ้าแรง $\bar{F}$ กระทำต่ออนุภาคแล้ว งานที่ทำในช่วงการขจัด $\Delta\bar{s}$ ใช้เวลา Δt ฉะนั้น กำลังเฉลี่ย (Average Power) ของอนุภาค คือ

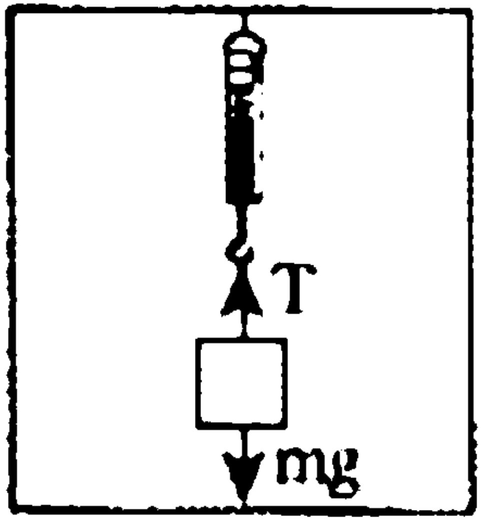
$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\bar{F} \bullet \Delta\bar{s}}{\Delta t}$$

ซึ่งสามารถหากำลังขณะใด ๆ ได้โดยให้ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{F} \bullet \Delta\bar{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{F} \bullet \frac{\Delta\bar{s}}{\Delta t} = \bar{F} \bullet \bar{v}$$

Example5.6

ลิฟท์ขนของมวล 1000 kg บรรทุกได้สูงสุด 800 kg มีแรงเสียดทานขนาด 4000 N หน่วงการเคลื่อนที่ขึ้น จงหากำลังม้าของมอเตอร์ต่ำสุดที่ทำให้ลิฟท์เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ 3 m/s



วิธีทำ

มอเตอร์ต้องทำให้ลวดสะลิงดึงลิฟต์ขึ้นมีความตึงเป็น $\bar{T}$ ขณะที่ $v = 3\ m/s$ (คงที่)

แล้ว $\bar{a} = 0$ ดังนั้น

$$\vec{T} = M\vec{g} + \vec{f}$$

เมื่อ M คือมวลทั้งหมดเท่ากับ $1800\ kg$

แทนค่าจะได้

$$T = 1.8 \times 10^3\ kg\ (9.8\ m/s^2) + 4 \times 10^3\ N$$
$$= 2.16 \times 10^4\ N$$

ฉะนั้นกำลังต้องใช้ทั้งหมดคือ

$$P = Tv$$
$$= (2.16 \times 10^4\ N)(3\ m/s)$$
$$= 6.5 \times 10^4\ W$$

หรือ $P = 65\ kW$

สรุป

งานที่ทำโดยแรงคงที่ $\vec{F}$ แล้วทำให้เกิดการขจัด $\vec{s}$ คือ

$$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

$$= Fs\cos\theta$$

งานที่ทำโดยแรงที่ไม่คงที่ $\vec{F}$ จากตำแหน่ง a ไปยัง b คือ

$$W = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

พลังงานจลน์ของอนุภาคมวล m ที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v คือ

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{เมื่อ} \quad v << c$$

ทฤษฎีงาน – พลังงาน คือ

$$W = \Delta K$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

พลังงานศักย์ที่สะสมไว้ในสปริงขณะยืดหรือหด คือ

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

พลังงานศักย์โน้มถ่วง

$$U_g = mgy$$

กฎการอนุรักษ์พลังงาน (เมื่อแรงที่กระทำต่อระบบเป็นแรงอนุรักษ์เท่านั้น)

$$E = K + U$$

$$= \text{ค่าคงที่}$$

พลังงานศักย์ระหว่างมวลที่อยู่ห่างกัน r คือ

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

แบบฝึกหัดท้ายบท