บทที่ 2

เวกเตอร์เชิงอนุพันธ์

Vector Differential

ในการศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์เชิงอนุพันธ์นั้นจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับอนุพันธ์ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ รวมถึงการหาอนุพันธ์ย่อย นอกจากนี้แล้วยังต้องมีพื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์และการดำเนินการทางเวกเตอร์ ดังนั้นในเอกสารบทนี้เราจะเริ่มจากการอธิบายเกี่ยวกับความหมายของอนุพันธ์และทบทวนการหาอนุพันธ์ และสุดท้ายจะอธิบายถึงอนุพันธ์ของเวกเตอร์และการประยุกต์ใช้ในทางวิทยาศาสตร์

2.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว อนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ซึ่งเราสามารถเขียนแทนด้วย $f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ D_x y$ และหาได้จาก

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใดๆ นั้นสามารถทำได้ดังนี้

1) แทนค่า x ของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วย $x+\Delta x$ ซึ่งจะได้ $f(x+\Delta x)$

2) นำ $f(x+\Delta x)$ ลบกับ $f(x)$ นั่นคือ $f(x+\Delta x) - f(x)$

3) นำ $f(x+\Delta x) - f(x)$ หารด้วย Δx นั่นคือ $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4) หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ จาก

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $f(x)=2x+3$ แล้ว จงหาอนุพันธ์ $f(x)$

วิธีทำ

1) แทนค่า $x+\Delta x$ ลงในฟังก์ชัน $f(x)=2x+3$ จะได้ $f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)+3$

2) $f(x+\Delta x)-f(x)$ นั่นคือ $f(x+\Delta x)-f(x) = \left[2(x+\Delta x)+3\right]-\left[2x+3\right]$

$$= 2x+2\Delta x+3-2x-3$$

$$= 2\Delta x$$

3) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ นั่นคือ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

4) หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x+3$ จาก $\dfrac{d}{dx}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 2$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x$ มีค่าเท่ากับ 2 หรือ $f'(x)=2$

ตัวอย่างที่ 2.2 ถ้า $f(x)=x^2+1$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

1) แทนค่า $x+\Delta x$ ลงในฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ จะได้ $f(x+\Delta x)=\left(x+\Delta x\right)^2+1$

2) $f(x+\Delta x)-f(x)$ นั่นคือ $f(x+\Delta x)-f(x)=[(x+\Delta x)^2+1]-(x^2+1)$

$$= x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1-x^2-1$$

$$= 2x\Delta x+\Delta x^2$$

3) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ นั่นคือ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$

$$= 2x+\Delta x$$

4) หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ จาก $\dfrac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)$$

$$= 2x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2+1$ มีค่าเท่ากับ $2x$ หรือ $f'(x)=2x$

2.2 สูตรพื้นฐานสำหรับการหาอนุพันธ์

เมื่อ a และ c คือค่าคงตัวใดๆ

1) ถ้า $f(x)=c$ แล้ว $f'(x)=0$ ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $f'(x)=1$

3) ถ้า $f(x)=x^n$ แล้ว $f'(x)=nx^{n-1}$

4) ถ้า $f(x)=uv$ แล้ว $f'(x)=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$

5) ถ้า $f(x)=uvw$ แล้ว $f'(x)=uv\dfrac{dw}{dx}+uw\dfrac{dv}{dx}+vw\dfrac{du}{dx}$

6) ถ้า $f(x)=\dfrac{u}{v}$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

7) ถ้า $f(x)=u+v$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$

8) ถ้า $f(x)=u^n$ แล้ว $f'(x)=nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

9) ถ้า $f(x)=\sin(x)$ แล้ว $f'(x)=\cos(x)$

10) ถ้า $f(x)=\sin(u)$ แล้ว $f'(x)=\cos(u)\dfrac{du}{dx}$

11) ถ้า $f(x)=\cos(x)$ แล้ว $f'(x)=-\sin(x)$

12) ถ้า $f(x)=\cos(u)$ แล้ว $f'(x)=-\sin(u)\dfrac{du}{dx}$

13) ถ้า $f(x)=\tan(x)$ แล้ว $f'(x)=\sec^2(x)$

14) ถ้า $f(x)=\tan(u)$ แล้ว $f'(x)=\sec^2(u)\dfrac{du}{dx}$

15) ถ้า $f(x)=e^x$ แล้ว $f'(x)=e^x$

16) ถ้า $f(x)=e^{ax}$ แล้ว $f'(x)=ae^{ax}$

17) ถ้า $f(x)=\ln|x|$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

18) ถ้า $f(x)=a\ln|x|$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{a}{x}$

ตัวอย่างที่ 2.3 ถ้า $s=(t^2-3)^4$ แล้วจงหา $\frac{ds}{dt}$

วิธีทำ

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(t^2-3)^4$$

$$=4(t^2-3)^3\frac{d}{dt}(t^2-3)$$

$$=4(t^2-3)^3\left[\frac{dt^2}{dt}-\frac{d3}{dt}\right]$$

$$=4(t^2-3)^3(2t-0)$$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt}=8t(t^2-3)^3$

ตัวอย่างที่ 2.4 ถ้า $y=(x^2+4x)^3(2x^3-1)^2$ แล้วจงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+4x)^3\frac{d}{dx}(2x^3-1)^2+(2x^3-1)^2\frac{d}{dx}(x^2+4x)^3$$

$$=(x^2+4x)^3[2(2x^3-1)]\frac{d}{dx}(2x^3-1)+(2x^3-1)^2[3(x^2+4x)^2]\frac{d}{dx}(x^2+4x)$$

$$=(x^2+4x)^3[2(2x^3-1)][3(2x^2)]+(2x^3-1)^2[3(x^2+4x)^2][2x+4]$$

$$=(x^2+4x)^2(2x^3-1)\{(x^2+4x)[12x^2]+(2x^3-1)[6x+12]\}$$

$$=(x^2+4x)^2(2x^3-1)\{12x^4+48x^3+12x^4+24x^3-6x-12\}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=(x^2+4x)^2(2x^3-1)\{24x^4+72x^3-6x-12\}$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

จงหาค่าอนุพันธ์จากฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+1$

2) $y=(x-1)^3(x+2)^4$

3) $y=(x^3-3x)^4$

4) $y=(x+1)^2(x^2+1)^{-3}$

5) $y=\frac{2x+1}{x^2-1}$

6) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

7) $f(z)=\sqrt{z^4}-3z$

8) $f(t)=\frac{t^2}{4}-\sqrt{t}$

2.3 การหาอนุพันธ์โดยใช้ กฎลูกโซ่

ถ้า $u = g(x)$ และ $y = f(u)$ แล้วจะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dy}{du}\right)\left(\dfrac{du}{dx}\right)$

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ $y(x) = \left(x^4 - 3x^2\right)^3$ และ $x(t) = t^2 + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$!

วิธีทำ หา $\dfrac{dy}{dt}$ โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้ $\dfrac{dy}{dt} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 3x^2)^3 \;!$$

$$= 3(x^4 - 3x^2)^2 \frac{d}{dx}(x^4 - 3x^2)$$

$$= 3(x^4 - 3x^2)^2 \left(4x^3 - 6x\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(t^2 + 1) \qquad = 2t$$

ดังนั้น จะได้ $\dfrac{dy}{dt} = 3(x^4 - 3x^2)^2 \left(4x^3 - 6x\right)(2t) \qquad = 6t(x^4 - 3x^2)^2 \left(4x^3 - 6x\right)$

$$\frac{dy}{dt} = 6t[(t^2+1)^4 - 3(t^2+1)]^2 \left(4(t^2+1)^3 - 6(t^2+1)\right)$$

2.4 อนุพันธ์ย่อย

การหาอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยเมื่อทำการเทียบกับตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งแล้วตัวแปรอื่นๆ จะถูกมองว่าเป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับ x และ y ซึ่ง การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ หรือ $f_x(x, y)$ จะกำหนดให้ y เป็นค่าคงตัว และการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ หรือ $f_y(x, y)$ จะกำหนดให้ x เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ และ $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ ของ $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$

วิธีทำ $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2xy + 3y^2) = \frac{\partial}{\partial x}x^3 - \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial x}(3y^2)$$

$$= 3x^2 - 2y + 0$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2xy + 3y^2) = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2xy + 3y^2) = \frac{\partial}{\partial y}x^3 - \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2)$$

$$= 0 - 2x + 6y$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2xy + 3y^2) = 6y - 2x$$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ และ $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ ของ $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$

วิธีทำ $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xy}}{e^x + e^y}\right) = \frac{(e^x + e^y)\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} - e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y)}{(e^x + e^y)^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^y)ye^{xy} - e^{xy}e^x}{(e^x + e^y)^2}$$

$$= \frac{e^{xy}\left[(y-1)e^x + ye^y\right]}{e^{2x} + 2e^{x+y} + e^{2y}}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{e^{xy}\left[(y-1)e^x + ye^y\right]}{e^{2x} + 2e^{x+y} + e^{2y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{xy}}{e^x + e^y}\right) = \frac{(e^x + e^y)\frac{\partial}{\partial y}e^{xy} - e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y)}{(e^x + e^y)^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^y)xe^{xy} - e^{xy}e^y}{(e^x + e^y)^2} \qquad = \frac{\left[(x-1)e^x + xe^y\right]e^{xy}}{e^{2x} + 2e^{x+y} + e^{2y}}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\left[(x-1)e^x + xe^y\right]e^{xy}}{e^{2x} + 2e^{x+y} + e^{2y}}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1) จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1) $y = \sin(ax^3)$ 1.2) $y = e^{ax}$ 1.3) $y = e^{3x^2}$

2) กำหนด $y = \dfrac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ และ $u = x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

3) กำหนด $y = x^2 - 4x$ และ $x = \sqrt{2t^2 + 1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$

4) จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{d}{dx}\cot(x) = \csc^2(x)$

5) จงหาอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ และ $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1) $f(x, y) = 3x^5 y - 7x^3 y$

5.2) $f(x, y) = x^3 e^{xy}$

5.3) $f(x, y) = e^{3x} \cos(xy)$

2.5 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์

การประยุกต์ใช้อนุพันธ์ในการหาจุดวิกฤต (x_c) ค่าสูงสุด ($y_{\max}$) ค่าต่ำสุด ($y_{\min}$) และจุดเปลี่ยนโค้ง ($x_c, y_{\max}$) หรือ ($x_c, y_{\min}$) ของฟังก์ชันใดๆ นั้นสามารถทำได้ ดังนี้

2.5.1 หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$f'(x)$ เทียบกับ x แล้วแทนค่า $x < x_c$ (ค่าวิกฤต) และ แทนค่า $x > x_c$

ถ้าเครื่องหมายเปลี่ยนจาก +ไปเป็น - แสดงว่าจุดนั้น ให้ค่าสูงสุด
ถ้าเครื่องหมายเปลี่ยนจาก - ไปเป็น + แสดงว่าจุดนั้น ให้ค่าต่ำสุด

2.5.2 หาอนุพันธ์อันดับสอง

$f''(x)$ เทียบกับ x แล้วแทนค่า $x = x_c$

ถ้า $f''(x_c) < 0$ แล้ว $f(x)$ ให้ค่าสูงสุด ! !

ถ้า $f''(x_c) > 0$ แล้ว $f(x)$ ให้ค่าต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 2.8 จงแสดงว่าจุด $(1,-1)$ เป็นจุดเปลี่ยนโค้ง และมี 1 เป็นจุดวิกฤต และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x)=2(x-1)^2-1$ เท่ากับ -1

วิธีทำ จาก $f(x)=2(x-1)^2-1$ จะได้ $f'(x)=\frac{d}{dx}\left[2(x-1)^2-1\right] \;=4(x-1)$

ณ จุดวิกฤต หรือจุดเปลี่ยนโค้งจะมีความชันเป็น 0 นั่นคือ $f'(x)=0$

ดังนั้น $f'(x)=4(x-1)=0$ จะได้ $x-1=0$

เพราะฉะนั้นจะได้ จุดวิกฤต (x_c) เท่ากับ 1

เมื่อแทน $x=1$ ในโจทย์ $f(x)=2(x-1)^2-1$ จะได้ $f(x)=-1$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า (1,-1) เป็นจุดเปลี่ยนโค้งของฟังก์ชัน $f(x)=2(x-1)^2-1$

1) การหาค่าต่ำสุด หรือสูงสุด ด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ทำได้ดังนี้

แทนค่า $x<x_c$ และ $x>x_c$ ตามลำดับ เมื่อ x_c คือจุดที่ต้องการทดสอบ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมาย

ถ้าเครื่องหมายเปลี่ยนจาก + ไปเป็น - แสดงว่าจุดนั้น ให้ค่าสูงสุด

ถ้าเครื่องหมายเปลี่ยนจาก - ไปเป็น + แสดงว่าจุดนั้น ให้ค่าต่ำสุด

กำหนดจุดทดสอบ ที่ $x_c=1$

พิจารณากรณี $x<x_c$ โดยแทน $x=0$ ใน $f'(x)=4(x-1)$

จะได้ $f'(x)=4(0-1) \;=-4$

พิจารณากรณี $x>x_c$ โดยแทน $x=2$ ใน $f'(x)=4(x-1)$

จะได้ $f'(x)=8(2-1) \;=4$

เครื่องหมายเปลี่ยนจากลบ (-4) เป็นบวก (+4) แสดงว่าที่ $x=1$ ให้ค่าต่ำสุดเท่ากับ -1

2) การหาจุดต่ำสุดด้วยอนุพันธ์อันดับสอง ทำได้โดยการแทนค่า $x=x_c$.ใน $f''(x)$

ถ้า $f''(x_c)<0$ แล้ว $f(x)$ จะให้ค่าสูงสุด

ถ้า $f''(x_c)>0$ แล้ว $f(x)$ จะให้ค่าต่ำสุด

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $f'(x)=4(x-1)$ และจะได้ $f''(x)=4$

เนื่องจาก $4>0$ จึงแสดงให้เห็นได้ว่าที่จุด $x=1$ จะให้ค่าต่ำสุด

และเมื่อแทน $x=1$ ในโจทย์ $f(x)=2(x-1)^2-1$ จะได้ $f(x)=-1$

ดังนั้นจะได้ว่า ที่จุดวิกฤต $x=1$ จะไห้ค่าต่ำสุด เท่ากับ -1

หมายเหตุ $y+1=4(x-1)^2$ เป็นฟังก์ชันพาราโบลาแบบหงาย $y-k=4c(x-h)^2$ ซึ่งมีจุดยอดหรือจุดต่ำสุด คือ (h,k)

2.6 เวกเตอร์เชิงอนุพันธ์

เวกเตอร์เชิงอนุพันธ์ (Vector differential) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเวกเตอร์ต่อการเปลี่ยนแปลงตัวแปรสเกลาร์ที่เกี่ยวข้องและตัวแปรสเกลาร์นั้นต้องมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ อาทิเช่น *ความเร็ว* หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงการกระจัดต่อเวลาที่เข้าใกล้ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\frac{d\vec{s}}{dt}$

ซึ่ง $\frac{d\vec{s}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$ เมื่อการกระจัดเป็นฟังก์ชันของเวลา $\vec{s} = \vec{s}(t)$

2.6.1 อนุพันธ์ของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขึ้นกับตัวแปรสเกลาร์ u หรือ $\vec{A} = \vec{A}(u)$ แล้วอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เทียบกับตัวแปร u ขียนด้วย $\frac{d\vec{A}}{du}$ และหาได้จาก $\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}$

เมื่อ $\Delta\vec{A} = \vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)$

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาอนุพันธ์ของ $\vec{s} = \vec{s}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{v}_0(t+\Delta t) + \frac{1}{2}\vec{g}(t+\Delta t)^2] - [\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{v}_0 t + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)] - [\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{v}_0 t + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{g}t\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t^2 - \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_0\Delta t + \vec{g}t\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{v}_0 + \vec{g}t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t]\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}[\vec{v}_0 + \vec{g}t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t]$$

ดังนั้น $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

2.6.2 อนุพันธ์ย่อย

กรณีที่เวกเตอร์เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปรสเกลาร์ เช่น $\overline{A} = \overline{A}(u,v,w)$ แล้วอนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ คือการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรสเกลาร์แต่ละตัวนั่นเอง ซึ่งหาอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u, v, w) - \vec{A}(u,v,w)}{\Delta u}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\vec{A}(u, v+\Delta v, w) - \vec{A}(u,v,w)}{\Delta v}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\vec{A}(u, v, w+\Delta w) - \vec{A}(u,v,w)}{\Delta w}$$

อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ที่เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร $\overline{A} = \overline{A}(u,v,w)$ คือ $\frac{\partial \overline{A}}{\partial u}, \frac{\partial \overline{A}}{\partial v}, \frac{\partial \overline{A}}{\partial w}$

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหาอนุพันธ์ย่อยของ $\vec{F}(x,t) = x^2t + 3xt^2$

วิธีทำ
$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2t + 3xt^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2t) + \frac{\partial}{\partial x}(3xt^2)$$
$$= t\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 3t^2\frac{\partial}{\partial x}(x)$$
$$= 2xt + 3t^2$$

ดังนั้น จะได้อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ $\vec{F}(x,t) = x^2t + 3xt^2$ เทียบ x เป็น $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 2xt + 3t^2$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x^2t + 3xt^2)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(x^2t) + \frac{\partial}{\partial t}(3xt^2)$$
$$= x^2\frac{\partial}{\partial t}(t) + 3x\frac{\partial}{\partial t}(t^2)$$
$$= x^2 + 6xt$$

ดังนั้น อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ $\vec{F}(x,t) = x^2t + 3xt^2$ เทียบ t คือ $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = x^2 + 6xt$

2.6.3 สูตรเบื้องต้นเกี่ยวกับอนุพันธ์ของเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{A}=\vec{A}(u)$, $\vec{B}=\vec{B}(u)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ขึ้นกับ u และ $f=f(u)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่ขึ้นกับ u แล้ว จะได้อนุพันธ์ของเวกเตอร์ดังนี้

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\pm\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{du}\pm\frac{d\vec{B}}{du}$$

$$\frac{d}{du}(f\vec{A})=f\frac{d\vec{A}}{du}+\vec{A}\frac{df}{du}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right) = \vec{A}\frac{d\vec{B}}{du}+\vec{B}\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$$

การหาอนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ใช้ความสัมพันธ์ข้างบนได้เช่นกัน เพียงแต่เปลี่ยน d เป็น ∂

2.6.4 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ที่เป็นฟังก์ชันประกอบ

ถ้า $\vec{A}=\vec{A}(u(s))$ เป็นเวกเตอร์ประกอบ [$\vec{A}=\vec{A}(u)$ และ $\vec{u}=\vec{u}(s)$] แล้วอนุพันธ์ของเวกเตอร์ประกอบนี้สามารถหาโดยใช้ กฎลูกโซ่ $\dfrac{d\vec{A}}{ds}=\dfrac{d\vec{A}}{du}\dfrac{d\vec{u}}{ds}$

ถ้า $\vec{A}=\vec{A}(u(s),v(s),w(s))$ เป็นเวกเตอร์ประกอบ แล้วอนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ประกอบหาได้จาก $\dfrac{d\vec{A}}{ds}=\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial u}\dfrac{d\vec{u}}{ds}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial v}\dfrac{d\vec{v}}{ds}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial w}\dfrac{d\vec{w}}{ds}$

เมื่อ $\vec{A}=\vec{A}(u,v,w)$ และ $\vec{u}=\vec{u}(s)$, $\vec{v}=\vec{v}(s)$, $\vec{w}=\vec{w}(s)$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{F}(s)=3s^2+s+1$ และ $\bar{s}(t)=t^3-3$

วิธีทำ หา $\dfrac{d\vec{F}}{ds}=\dfrac{d}{ds}(3s^2+s+1)=6s+1$ และ $\dfrac{d\bar{s}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(t^3-3)=3t^2$

$$\frac{d\vec{F}}{dt}=\frac{d\vec{F}}{ds}\frac{d\bar{s}}{dt}=(6s+1)(3t^2)$$

ดังนั้น $\dfrac{d\vec{F}}{dt}=[6(t^3-3)+1](3t^2)=18t^5-51t^2$

2.6.5 อนุพันธ์อันดับสองและอันดับสามของเวกเตอร์

ถ้า $\overline{A} = \overline{A}(u)$ เป็นเวกเตอร์ แล้วอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของเวกเตอร์หาได้จาก

$$\frac{d^2\overline{A}}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{d\overline{A}}{du}\right) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2\overline{A}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\overline{A}}{\partial u}\right)$$

ถ้า $\overline{A} = \overline{A}(u)$ เป็นเวกเตอร์ แล้วอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อยอันดับสามของเวกเตอร์หาได้จาก

$$\frac{d^3\overline{A}}{du^3} = \frac{d}{du}\left(\frac{d^2\overline{A}}{du^2}\right) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^3\overline{A}}{\partial u^3} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial u^2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาอนุพันธ์อันดับสองและสามของ $\bar{r} = A_0 \sin(\omega t)\hat{r}$ เมื่อ A_0, ω เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $\hat{r}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\bar{r}$

วิธีทำ เนื่องจากเวกเตอร์ $\bar{r} = A_0 \sin(\omega t)\hat{r}$ ขึ้นกับ t ดังนั้นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[A_0 \sin(\omega t)\right]\hat{r} \\ &= A_0 \frac{d}{dt}\sin(\omega t)\hat{r} \\ &= A_0 \cos(\omega t)\hat{r}\frac{d}{dt}(\omega t)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d\bar{r}}{dt} = A_0\omega \cos(\omega t)\hat{r}$

อนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(A_0\omega \cos(\omega t)\right)\hat{r} \\ &= A_0\omega\hat{r}\frac{d}{dt}\left(\cos(\omega t)\right) \\ &= -A_0\omega \sin(\omega t)\hat{r}\frac{d}{dt}(\omega t)\end{aligned}$$

!

ดังนั้น $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -A_0\omega^2 \sin(\omega t)\hat{r}$

เนื่องจาก $\bar{r} = A_0 \sin(\omega t)\hat{r}$ ดังนั้น $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\omega^2\bar{r}$

อนุพันธ์อันดับสามของเวกเตอร์

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(-A_0\omega^2\sin(\omega t)\right)\hat{r}$$

$$=-A_0\omega^2\hat{r}\frac{d}{dt}\left(\sin(\omega t)\right)$$

$$=-A_0\omega^2\cos(\omega t)\hat{r}\frac{d}{dt}(\omega t)$$

ดังนั้น $\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}=-A_0\omega^3\cos(\omega t)\hat{r}$

2.6.6 ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์

ผลต่างเชิงอนุพันธ์หรือดิฟเฟอเรนเชียล หมายถึง ค่าการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยของเวกเตอร์ ซึ่งผลต่างเชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}=\vec{A}(u)$ ใดๆ เขียนแทนด้วย $d\vec{A}$ และสามารถหาได้ค่าจาก

$$d\vec{A}=\lim_{\Delta u\to 0}\left[\vec{A}(u+\Delta u)-\vec{A}(u)\right]$$

หรือ ถ้า $\vec{A}=\vec{A}(u,v,w)$ แล้ว $d\vec{A}=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0\\ \Delta w\to 0}}\left[\vec{A}(u+\Delta u,v+\Delta v,w+\Delta w)-\vec{A}(u,v,w)\right]$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\bar{E}=E_0\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$ เมื่อ E_0,ω,c เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้ว

จงแสดงว่า $\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=E_0\frac{\partial}{\partial t}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$=E_0\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]$$

$$=E_0\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\omega$$

$$=E_0\omega\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}=E_0\omega\frac{\partial}{\partial t}\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$=-E_0\omega\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$=-E_0\omega\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\omega$$

$$=-E_0\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = E_0 \frac{\partial}{\partial x}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = E_0\left(-\frac{\omega}{c}\right)\frac{\partial}{\partial x}\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$= E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] \qquad = -E_0\left(-\frac{\omega}{c}\right)\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$= E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\left(-\frac{\omega}{c}\right) \qquad = -E_0\left(-\frac{\omega}{c}\right)\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\left(-\frac{\omega}{c}\right)$$

$$= E_0\left(-\frac{\omega}{c}\right)\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) \qquad = -E_0\frac{\omega^2}{c^2}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$$

แทน $-E_0\omega^2 \sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ ลงใน $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right)\left[-E_0\omega^2 \sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\right]$

จะได้ $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1) ถ้า $\vec{A} = A_0 \sin(b\omega t) + B_0 \cos(b\omega t)$ เมื่อ $\vec{A} = \vec{A}(t)$ และ A_0, B_0, b, ω เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้ว

จงหา 1.1) $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 1.2) $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$

2) กำหนดให้ $\vec{A} = e^t[a\cos(2t) + b\sin(2t)]$ เมื่อ $\vec{A} = \vec{A}(t)$ และ a, b เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้ว

จงแสดงว่า $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} - 2\frac{d\vec{A}}{dt} + 5\vec{A} = 0$

3) กำหนดให้ $\vec{A} = \frac{A_0}{r}e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$ เมื่อ $\vec{A} = \vec{A}(t)$ และ A_0, ω, c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $i = \sqrt{-1}$

แล้วจงแสดงว่า

3.1) $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t \partial r}$ 3.2) $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \vec{A}}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

2.7 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

2.7.1 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ ในระบบพิกัดฉากที่ขึ้นกับตัวแปรเดียว

กำหนด $\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และ A_x, A_y, A_z เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ เป็น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน x, y, z ตามลำดับ แล้ว

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์ $\vec{A} = \vec{A}(u)$ ในระบบพิกัดฉากหาได้จาก

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \frac{dA_x}{du}\hat{e}_x + \frac{dA_y}{du}\hat{e}_y + \frac{dA_z}{du}\hat{e}_z$$

อนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์ $\vec{A} = \vec{A}(u)$ ในระบบพิกัดฉากหาได้จาก

$$\frac{d^2\vec{A}}{du^2} = \frac{d^2A_x}{du^2}\hat{e}_x + \frac{d^2A_y}{du^2}\hat{e}_y + \frac{d^2A_z}{du^2}\hat{e}_z = \frac{d}{du}\left(\frac{dA_x}{du}\hat{e}_x + \frac{dA_y}{du}\hat{e}_y + \frac{dA_z}{du}\hat{e}_z\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{v}(t) = \frac{3}{2}t^2\hat{e}_x - 3t\hat{e}_y + \hat{e}_z$

วิธีทำ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์หาได้จาก

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{3}{2}t^2\hat{e}_x - 3t\hat{e}_y + \hat{e}_z\right) = \frac{3}{2}\hat{e}_x\frac{d}{dt}t^2 - 3\hat{e}_y\frac{d}{dt}t + \hat{e}_z\frac{d}{dt}1$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)2t\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + (0)\hat{e}_z = 3t\hat{e}_x - 3\hat{e}_y$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์ $\vec{v}(t) = \frac{3}{2}t^2\hat{e}_x - 3t\hat{e}_y + \hat{e}_z$ คือ $3t\hat{e}_x - 3\hat{e}_y$

อนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์ หาได้จาก

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{v}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(3t\hat{e}_x - 3\hat{e}_y\right)\\ &= \left(3\hat{e}_x\frac{d}{dt}t - \hat{e}_y\frac{d}{dt}3\right)\\ &= 3\hat{e}_x - 0\\ &= 3\hat{e}_x\end{aligned}$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์ $\vec{v}(t) = \frac{3}{2}t^2\hat{e}_x - 3t\hat{e}_y + \hat{e}_z$ คือ $3\hat{e}_x$

2.7.2 อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากที่ขึ้นกับตัวแปรหลายตัว

อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของเวกเตอร์ $\vec{A}=\vec{A}(u,v,w)$ ในพิกัดฉากเทียบกับตัวแปร u,v,w

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial u}=\frac{\partial A_x}{\partial u}\hat{e}_x+\frac{\partial A_y}{\partial u}\hat{e}_y+\frac{\partial A_z}{\partial u}\hat{e}_z$$
$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial v}=\frac{\partial A_x}{\partial v}\hat{e}_x+\frac{\partial A_y}{\partial v}\hat{e}_y+\frac{\partial A_z}{\partial v}\hat{e}_z$$
$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial w}=\frac{\partial A_x}{\partial w}\hat{e}_x+\frac{\partial A_y}{\partial w}\hat{e}_y+\frac{\partial A_z}{\partial w}\hat{e}_z$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของเวกเตอร์ $\vec{A}=\vec{A}(u,v,w)$ ในระบบพิกัดฉากเทียบกับตัวแปร u,v,w

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 A_x}{\partial u^2}\hat{e}_x+\frac{\partial^2 A_y}{\partial u^2}\hat{e}_y+\frac{\partial^2 A_z}{\partial u^2}\hat{e}_z$$
$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 A_x}{\partial v^2}\hat{e}_x+\frac{\partial^2 A_y}{\partial v^2}\hat{e}_y+\frac{\partial^2 A_z}{\partial v^2}\hat{e}_z$$
$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial w^2}=\frac{\partial^2 A_x}{\partial w^2}\hat{e}_x+\frac{\partial^2 A_y}{\partial^2 w}\hat{e}_y+\frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 w}\hat{e}_z$$

2.7.3 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ประกอบในระบบพิกัดฉาก

อนุพันธ์ของเวกเตอร์ประกอบ $\vec{A}=\vec{A}(u)$ และ $u=u(s)$ ในพิกัดฉากหาได้โดยใช้กฎลูกโซ่

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\frac{d\vec{A}_x}{ds}\hat{e}_x+\frac{d\vec{A}_y}{ds}\hat{e}_y+\frac{d\vec{A}_z}{ds}\hat{e}_z$$

เมื่อ $\frac{d\vec{A}_x}{ds}=\frac{d\vec{A}_x}{du}\frac{du}{ds};\frac{d\vec{A}_y}{ds}=\frac{d\vec{A}_y}{du}\frac{du}{ds};\frac{d\vec{A}_z}{ds}=\frac{d\vec{A}_z}{du}\frac{du}{ds}$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์ประกอบ $\vec{A}=\vec{A}(u,v,w)$ และ $u=u(s),\ v=v(s),\ \mathrm{w}=w(s)$ ในระบบพิกัดฉากหาได้โดย

$$\frac{d\vec{A}_x}{ds}=\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial v}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial w}\frac{dw}{ds}$$
$$\frac{d\vec{A}_y}{ds}=\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial v}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial w}\frac{dw}{ds}$$
$$\frac{d\vec{A}_z}{ds}=\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial v}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial w}\frac{dw}{ds}$$

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาอนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์ $\vec{r}(x,t) = xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y$

วิธีทำ อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของเวกเตอร์ เทียบกับ x หาได้จาก

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{r}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}xt^2\hat{e}_x - 3\frac{\partial}{\partial x}x^2t\hat{e}_y$$

$$= t^2\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}x - 3t\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial t}x^2 = t^2\hat{e}_x - 6xt\hat{e}_y$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของเวกเตอร์ $\vec{r}(x,t) = xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y$ เทียบกับ x คือ $t^2\hat{e}_x - 6xt\hat{e}_y$

อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของเวกเตอร์ เทียบกับ t หาได้จาก

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y\right) = \frac{\partial}{\partial t}xt^2\hat{e}_x - 3\frac{\partial}{\partial t}x^2t\hat{e}_y$$

$$= x\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial t}t^2 - 3x^2\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial t}t = 2xt\hat{e}_x - 3x^2\hat{e}_y$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ $\vec{r}(x,t) = xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y$ เทียบกับ t คือ $2xt\hat{e}_x - 3x^2\hat{e}_y$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของเวกเตอร์ เทียบกับ x หาได้จาก

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{r}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(t^2\hat{e}_x - 6xt\hat{e}_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}t^2\hat{e}_x - \frac{\partial}{\partial x}6xt\hat{e}_y$$

$$= t^2\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}1 - 6t\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial x}x = t^2\hat{e}_x(0) - 6t\hat{e}_y = -6t\hat{e}_y$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของเวกเตอร์ $\vec{r}(x,t) = xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y$ เทียบกับ x คือ $-6t\hat{e}_y$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของเวกเตอร์ เทียบกับ t หาได้จาก

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{r}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(2xt\hat{e}_x - 3x^2\hat{e}_y\right) = \frac{\partial}{\partial t}2xt\hat{e}_x - 3\frac{\partial}{\partial t}x^2\hat{e}_y$$

$$= 2x\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial t}t - 3x^2\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial t}1 = 2x\hat{e}_x - 3x^2\hat{e}_y(0) = 2x\hat{e}_x$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของเวกเตอร์ $\vec{r}(x,t) = xt^2\hat{e}_x - 3x^2t\hat{e}_y$ เทียบกับ t คือ $2x\hat{e}_x$

ตัวอย่างที่ 2.16 กำหนด $\overline{A}=(u^2+1)\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+\sin(3u)\hat{e}_z$ จงหา $\frac{d\overline{A}}{du}$ และ $\frac{d^2\overline{A}}{du^2}$

วิธีทำ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\overline{A}=(u^2+1)\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+\sin(3u)\hat{e}_z$ เทียบกับ u หาได้จาก

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{A}}{du}&=\frac{d}{du}\left((u^2+1)\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+\sin(3u)\hat{e}_z\right)\\&=\frac{d}{du}(u^2+1)\hat{e}_x-\frac{d}{du}3e^u\hat{e}_y+\frac{d}{du}\sin(3u)\hat{e}_z\\&=2u\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+3\cos(3u)\hat{e}_z\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d\overline{A}}{du}=2u\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+3\cos(3u)\hat{e}_z$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์ $\overline{A}$ คือ $2u\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+3\cos(3u)\hat{e}_z$

และอนุพันธ์อันดับสองของ $\overline{A}=(u^2+1)\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+\sin(3u)\hat{e}_z$ เทียบกับ u หาได้จาก

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overline{A}}{du^2}&=\frac{d}{du}\left(2u\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y+3\cos(3u)\hat{e}_z\right)\\&=\frac{d}{du}2u\hat{e}_x-\frac{d}{du}3e^u\hat{e}_y+\frac{d}{du}3\cos(3u)\hat{e}_z\\&=2\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y-9\sin(3u)\hat{e}_z\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d^2\overline{A}}{du^2}=2\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y-9\sin(3u)\hat{e}_z$

อนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์ $\overline{A}$ คือ $2\hat{e}_x-3e^u\hat{e}_y-9\sin(3u)\hat{e}_z$

2.7.4 ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

ถ้า $\overline{A}=A_x\hat{e}_x+A_y\hat{e}_y+A_z\hat{e}_z$ คือเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก แล้วผลต่างเชิงอนุพันธ์ หรือ ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\overline{A}$ เป็น $d\overline{A}=dA_x\hat{e}_x+dA_y\hat{e}_y+dA_z\hat{e}_z$

กำหนดให้ $\vec{r}=x\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งแล้วจะได้ผลต่างเชิงอนุพันธ์เป็น

$$\vec{r}=\hat{e}_x dx+\hat{e}_y dy+\hat{e}_z dz$$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1) กำหนดให้ $\vec{A}=(u+v)\hat{e}_x+u^2v\hat{e}_y+uv^3\hat{e}_z$ จงหา

1.1) $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial v}$ 1.2) $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial v^2}$ 1.3) $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial u\partial v}$, $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial v\partial u}$

2) ให้ $\vec{A}=uv\hat{e}_x+vw^2\hat{e}_y+u^2v\hat{e}_z$ และ $u=s,\ \ v=2s,\ \ w=s^2+1$ จงหา

2.1) $\dfrac{d\vec{A}}{ds}$ โดย $\dfrac{d\vec{A}}{ds}=\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial w}\dfrac{dw}{ds}$

2.2) $\dfrac{d\vec{A}}{ds}$ โดย $\dfrac{d\vec{A}}{ds}=\dfrac{d\vec{A}_x}{ds}\hat{e}_x+\dfrac{d\vec{A}_y}{ds}\hat{e}_y+\dfrac{d\vec{A}_z}{ds}\hat{e}_z$

3) จงหา $d\vec{A}$ ของเวกเตอร์ต่อไปนี้

3.1) $\vec{A}=3t^2\hat{e}_x+(3+t)\hat{e}_{xy}-(t^2-3t)\hat{e}_z$!

3.2) $\vec{A}=x^2\sin(y)\hat{e}_x+z^2\cos(y)\hat{e}_y-xyt\hat{e}_z$

3.3) $\vec{A}=ue^{2u}\hat{e}_x-\cos(u)\hat{e}_y$

4) กำหนดให้ $\vec{A}=3t^2\hat{e}_x-2t\hat{e}_y+t^3\hat{e}_z$ และ $\vec{B}=(3t-1)\hat{e}_x-\hat{e}_y+t\hat{e}_z$ แล้วจงหา $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$ $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)$ และ $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

5) จงหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

5.1) $\vec{r}=(t^3+2)\hat{e}_x+3t\hat{e}_y-\hat{e}_z$ 5.2) $\vec{r}=\sin(3t)\hat{e}_x-\cos(3t)\hat{e}_y$

5.3) $\vec{r}=e^{3t}\hat{e}_x+e^{2t}\hat{e}_y$ 5.4) $\vec{r}=(t^3-2)\hat{e}_x-(3t^2-4)\hat{e}_y-(9t-2t^2)\hat{e}_z$

6) กำหนดให้ $\vec{A}=(3x^2y+x^4)\hat{e}_x+(e^{xy}+x\cos(y))\hat{e}_y+y^2\sin(x)\hat{e}_z$ แล้วจงหา

6.1) $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial y}$ 6.2) $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}$ 6.3) $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial y\partial x}$

2.8 ตัวดำเนินการทางเวกเตอร์

เนื้อหาในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงตัวดำเนินการเดล ($\vec{\nabla}$) เกร์เดียน ($\vec{\nabla}f$) ไดเวอร์เจนต์ ($\vec{\nabla}\bullet\vec{A}$) และเคิร์ล ($\vec{\nabla}\times\vec{A}$) ในระบบพิกัดฉาก ระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลม พร้อมกับยกตัวอย่างประกอบ และนอกจากนี้ยังกล่าวถึง เอกลักษณ์ของ เดล เกรเดียนท์ ไดเวอร์เจนต์ เคิร์ล และลาปลาเซียนในระบบพิกัดต่างๆ

2.8.1 ตัวดำเนินการเดล

ตัวดำเนินการเดล (Del Operator) เขียนแทนด้วย $\vec{\nabla}$ หมายถึง อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับตัวแปรต่างๆ ในระบบพิกัดฉาก ระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลม

ตัวดำเนินการเดลในระบบพิกัดฉาก $\vec{\nabla} = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$

ตัวดำเนินการเดลในระบบพิกัดทรงกระบอก $\vec{\nabla} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$

ตัวดำเนินการเดลในระบบพิกัดทรงกลม $\vec{\nabla} = \hat{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{e}_\theta\frac{1}{\rho\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$

2.8.2 เกร์เดียนท์

เกร์เดียนท์ (Gradient) คือ การนำตัวดำเนินการเดล $\vec{\nabla}$ มากระทำกับฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นปริมาณ สเกลาร์ เขียนแทนด้วย $\vec{\nabla}f$ หรือ แกรดเอฟ (grad f) ซึ่งในระบบพิกัดต่างๆ เราสามารถหาเกร์เดียนท์ ของฟังก์ชัน f ได้ตามสมการ (3.4) - (3.6)

เกรเดียนท์ในระบบพิกัดฉาก : เกร์เดียนท์ของฟังก์ชัน f หรือ แกรดเอฟ ในระบบพิกัดฉาก

เป็น $\vec{\nabla}f(x,y,z) = \vec{\nabla}f = \hat{e}_x\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial f}{\partial z}$

เกรเดียนท์ในระบบพิกัดทรงกระบอก $\vec{\nabla}f(r,\theta,z) = \vec{\nabla}f = \hat{e}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \hat{e}_z\frac{\partial f}{\partial z}$

เกรเดียนท์ในระบบพิกัดทรงกลม $\vec{\nabla}f(\rho,\theta,\phi) = \vec{\nabla}f = \hat{e}_\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \hat{e}_\theta\frac{1}{\rho\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}$

และขนาดของเกร์เดียนท์ หาได้จาก $|grad\ f| = |\vec{\nabla}f|$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหาเกรเดียนท์ ($grad\ f$) ของสเกลาร์ ต่อไปนี้

1) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+3$

2) $f(r,\theta,z)=r+z\cos\theta$

3) $f(\rho,\theta,\phi)=\dfrac{3}{\rho^2}\cos\phi$

วิธีทำ

1) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+3$ จากโจทย์ f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก ดังนั้น

$$\vec{\nabla} f=\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+y^2z+3\right)+\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+y^2z+3\right)+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y+y^2z+3\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f&=\hat{e}_x\left(\frac{\partial}{\partial x}x^2y+\frac{\partial}{\partial x}y^2z+\frac{\partial}{\partial x}3\right)+\hat{e}_y\left(\frac{\partial}{\partial y}x^2y+\frac{\partial}{\partial y}y^2z+\frac{\partial}{\partial y}3\right)\\&\quad+\hat{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial z}x^2y+\frac{\partial}{\partial z}y^2z+\frac{\partial}{\partial z}3\right)\\&=\hat{e}_x\left(2xy+0+0\right)+\hat{e}_y\left(x^2+2yz+0\right)+\hat{e}_z\left(0+y^2+0\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $grad\ f(x,y,z)=2xy\hat{e}_x+(x^2+2yz)\hat{e}_y+y^2\hat{e}_z$

2) $f(r,\theta,z)=r+z\cos\theta$

จากโจทย์ f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ใดๆ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนั้นจะได้

$$\vec{\nabla} f=\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(r+z\cos\theta\right)+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r+z\cos\theta\right)+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(r+z\cos\theta\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f&=\hat{e}_r\left(\frac{\partial}{\partial r}r+\frac{\partial}{\partial r}z\cos\theta\right)+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}r+\frac{\partial}{\partial\theta}z\cos\theta\right)+\hat{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial z}r+\frac{\partial}{\partial z}z\cos\theta\right)\\&=\hat{e}_r\left(1+0\right)+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\left(0-z\sin\theta\right)+\hat{e}_z\left(0+\cos\theta\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $grad\ f(r,\theta,z)=\hat{e}_r-\dfrac{z}{r}\sin\theta\,\hat{e}_\theta+\cos\theta\,\hat{e}_z$

3) $f(\rho,\theta,\phi)=\dfrac{3}{\rho^2}\cos\phi$

จากโจทย์ f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ใดๆ ในระบบพิกัดทรงกลม ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \hat{e}_\rho\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{3}{\rho^2}\cos\phi\right)+\hat{e}_\theta\left(\frac{1}{\rho\sin\phi}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\left(\frac{3}{\rho^2}\cos\phi\right)+\hat{e}_\phi\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{3}{\rho^2}\cos\phi\right)\\
&=(3\cos\phi)\hat{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)+\hat{e}_\theta\left(\frac{1}{\rho\sin\phi}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\left(\frac{3}{\rho^2}\cos\phi\right)+\hat{e}_\phi\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{3}{\rho^2}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi)\\
&=(3\cos\phi)\hat{e}_\rho\left(-\frac{2}{\rho^3}\right)+\hat{e}_\theta\left(\frac{1}{\rho\sin\phi}\right)(0)+\hat{e}_\phi\left(\frac{3}{\rho^3}\right)(-\sin\phi)\end{aligned}$$

ดังนั้น $grad\, f(\rho,\theta,\phi)=\left(-\dfrac{3}{\rho^3}\right)\left[2\cos\phi\hat{e}_\rho+\sin\phi\hat{e}_\phi\right]$

2.8.3 ไดเวอร์เจนต์

ไดเวอร์เจนต์ (Divergent) คือ การนำตัวดำเนินการเดล $\vec{\nabla}$ มากระทำแบบดอทกับฟังก์ชันที่เป็นปริมาณเวกเตอร์ $\vec{A}$ หรือการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของตัวดำเนินการเดล $\vec{\nabla}$ กับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ ในระบบพิกัดต่างๆ เขียนแทนด้วย $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\bullet\vec{A}$ สามารถทำได้ดังนี้

ไดเวอร์เจนต์ในระบบพิกัดฉาก หรือผลคูณเชิงสเกลาร์ของตัวดำเนินการเดล $\vec{\nabla}$ กับ $\vec{A}$

$$div\ \vec{A}(x,y,z)=\vec{\nabla}\bullet\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ไดเวอร์เจนต์ในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$div\ \vec{A}(r,\theta,z)=\vec{\nabla}\bullet\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ไดเวอร์เจนต์ในระบบพิกัดทรงกลม

$$div\ \vec{A}(\rho,\theta,\phi)=\vec{\nabla}\bullet\vec{A}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2A_\rho\right)+\frac{1}{\rho\sin\phi}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi A_\phi\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหาไดเวอร์เจนต์ของเวกเตอร์ ต่อไปนี้

1) $\vec{A} = 3xy\hat{e}_x + y^2 z\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$

2) $\vec{A} = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r + r^2\sin\theta\,\hat{e}_\theta + z^2\hat{e}_z$

3) $\vec{A} = \dfrac{2\cos\phi}{\rho^3}\hat{e}_\rho + \dfrac{\sin\phi}{\rho^3}\hat{e}_\phi$

วิธีทำ

1) $\vec{A} = 3xy\hat{e}_x + y^2 z\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$ จากโจทย์ $A_x = 3xy$; $A_y = y^2 z$; $A_z = -2xz$

และ $div\ \vec{A} = \vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

จะได้ $div\ \vec{A} = \vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}(3xy) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2 z) + \dfrac{\partial}{\partial z}(-2xz) = 3y + 2yz - 2x$

ดังนั้น $div\ \vec{A} = 3y + 2yz - 2x$

2) $\vec{A} = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r + r^2\sin\theta\,\hat{e}_\theta + z^2\hat{e}_z$ จาก $A_r = r^2\cos\theta,\ A_\theta = r^2\sin\theta,\ A_z = z^2$

และ $div\ \vec{A} = \vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$! จะได้

$$div\ \vec{A} = \vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rr^2\cos\theta\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\sin\theta\right) + \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\right) + \frac{1}{r}r^2\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta) + \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial z}$$

$$= \frac{3r^2}{r}\cos\theta + \frac{1}{r}r^2\cos\theta + 2z$$

$$= 4r\cos\theta + 2z$$

ดังนั้น $div\ \vec{A} = 4r\cos\theta + 2z$

3) $\vec{A} = \dfrac{2\cos\phi}{\rho^3}\hat{e}_\rho + \dfrac{\sin\phi}{\rho^3}\hat{e}_\phi$

จากโจทย์ $A_\rho = \dfrac{2\cos\phi}{\rho^3},\ A_\theta = 0,\ A_\iota = \dfrac{\sin\phi}{\rho^3}$

และ $div\ \vec{A} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 A_\rho\right) + \dfrac{1}{\rho\sin\phi}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\rho\sin\phi}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi A_\phi\right)$ จะได้

$$div\ \vec{A} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{2\cos\phi}{\rho^3}\right) + 0 + \frac{1}{\rho\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\sin\phi}{\rho^3}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\rho^2}2\cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{\rho\sin\phi}\right)\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin^2\phi\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{\rho^2}2\cos\phi\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{\rho\sin\phi}\right)\frac{1}{\rho^3}2\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\sin\phi\right]$$

$$= \left[-\frac{2\cos\phi}{\rho^4}\right] + \left[\left(\frac{1}{\rho\sin\phi}\right)\frac{1}{\rho^3}2\sin\phi\cos\phi\right]$$

$$= -\frac{2\cos\phi}{\rho^4} + \frac{2\cos\phi}{\rho^4}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $div\ \vec{A} = 0$

2.8.4 เคิร์ล

เคิร์ล (Curl) คือ การนำตัวดำเนินการเดล $\overline{\nabla}$ มากระทำแบบครอสกับฟังก์ชันที่เป็น $\overline{A}$ หรือการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของตัวดำเนินการเดล $\overline{\nabla}$ กับเวกเตอร์ $\overline{A}$ ใดๆ ในระบบพิกัดต่างๆ เขียนแทนด้วย $Curl\ \overline{A} = \overline{\nabla}\times\overline{A}$

เคิร์ลในระบบพิกัดฉาก

$$\text{Curl } \overline{A}(x,y,z)=\overline{\nabla}\times\overline{A}(x,y,z)=\hat{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

หรือ
$$\text{Curl } \overline{A}(x,y,z)=\overline{\nabla}\times\overline{A}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

เคิร์ลในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\begin{aligned}\text{Curl } \overline{A}(r,\theta,z)&=\overline{\nabla}\times\overline{A}(r,\theta,z)\\ &=\hat{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)+\hat{e}_\theta\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\hat{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

หรือ
$$\text{Curl } \overline{A}(r,\theta,z)=\overline{\nabla}\times\overline{A}(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\theta & A_z\end{vmatrix}$$

เคิร์ลในระบบพิกัดทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{Curl } \overline{A}(\rho,\theta,\phi)&=\overline{\nabla}\times\overline{A}(\rho,\theta,\phi)\\ &=\hat{e}_\rho\frac{1}{\rho\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi A_\theta)-\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}\right)\\ &\quad+\hat{e}_\theta\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)+\hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\theta)\right)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ ต่อไปนี้

1) $\vec{A} = 3xy\hat{e}_x + y^2 z\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$

2) $\vec{A} = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r + r^2\sin\theta\,\hat{e}_\theta + z^2\hat{e}_z$

3) $\vec{A} = \dfrac{2\cos\phi}{\rho^3}\hat{e}_\rho + \dfrac{\sin\phi}{\rho^3}\hat{e}_\phi$

วิธีทำ

1) $\vec{A} = 3xy\hat{e}_x + y^2 z\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$ จากโจทย์ $A_x = 3xy$; $A_y = y^2 z$; $A_z = -2xz$

$$\text{Curl } \vec{A}(x,y,z) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(x,y,z) = \hat{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\text{Curl } \vec{A} = \hat{e}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2 z\right)\right) + \hat{e}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}(3xy) - \frac{\partial}{\partial x}(-2xz)\right) + \hat{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 z\right) - \frac{\partial}{\partial y}(3xy)\right)$$

$$= \hat{e}_x\left(0 - y^2\right) + \hat{e}_y(0 + 2z) + \hat{e}_z(0 - 3x)$$

ดังนั้น $\text{Curl } \vec{A} = -y^2\hat{e}_x + 2z\hat{e}_y - 3x\hat{e}_z$

2) $\vec{A} = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r + r^2\sin\theta\,\hat{e}_\theta + z^2\hat{e}_z$

จากโจทย์ $A_r = r^2\cos\theta$, $A_\theta = r^2\sin\theta$, $A_z = z^2$

$$\text{Curl } \vec{A}(r,\theta,z) = \hat{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\text{Curl } \vec{A}(r,\theta,z) = \hat{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(z^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r^2\sin\theta\right)\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(r^2\cos\theta\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(z^2\right)\right)$$
$$+ \hat{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rr^2\sin\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\cos\theta\right)\right)$$
$$= \hat{e}_r(0-0) + \hat{e}_\theta(0-0) + \hat{e}_z\left(\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\right) - \frac{1}{r}r^2\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta)\right)$$
$$= \hat{e}_z\left(\frac{1}{r}\sin\theta\left(3r^2\right) - \frac{1}{r}r^2(-\sin\theta)\right)$$
$$= \hat{e}_z(3r\sin\theta + r\sin\theta) \quad = 4r\sin\theta\,\hat{e}_z$$

ดังนั้น $\text{Curl } \vec{A}(r,\theta,z) = 4r\sin\theta\,\hat{e}_z$

3) $\vec{A}=\dfrac{2\cos\phi}{\rho^3}\hat{e}_\rho+\dfrac{\sin\phi}{\rho^3}\hat{e}_\phi$

จากโจทย์ จะได้ $A_\rho=\dfrac{2\cos\phi}{\rho^3},\ A_\theta=0,\ A_\phi=\dfrac{\sin\phi}{\rho^3}$ และ จากสมการ (3.12) จะได้

$$\begin{aligned}\text{Curl }\vec{A}(\rho,\theta,\phi)&=\hat{e}_\rho\frac{1}{\rho\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi(0))-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\phi}{\rho^3}\right)\right)\\&\quad+\hat{e}_\theta\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\left(\frac{\sin\phi}{\rho^3}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{2\cos\phi}{\rho^3}\right)\right)\\&\quad+\hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2\cos\phi}{\rho^3}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(0))\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\hat{e}_\rho\frac{1}{\rho\sin\phi}(0-0)+\hat{e}_\theta\frac{1}{\rho}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi)\right)\\&\quad+\hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}(0)-0\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\text{Curl }\vec{A}(\rho,\theta,\phi)=0$

แบบฝึกหัดที่ 2.5

1) จงหาเกรเดียนท์ของฟังก์ชันสเกลาร์ต่อไปนี้

1.1) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 1.2) $f(x,y,z)=2x^2-3xy+2z^3y$

1.3) $f(r,\theta,z)=r^2+z\cos\theta$ 1.4) $f(r,\theta,z)=\dfrac{1}{3}r^{-3}\cos\theta$

1.5) $f(\rho,\theta,\phi)=\rho\cos\phi$ 1.6) $f(\rho,\theta,\phi)=\rho\sin\phi\cos\theta$

2) จงหาไดเวอร์เจนต์และเคิร์ลของเวกเตอร์ต่อไปนี้

2.1) $\vec{A}=x^2\hat{e}_x+y^2\hat{e}_y+z^2\hat{e}_z$ 2.2) $\vec{A}=2xz^2\hat{e}_x-yz^2\hat{e}_y+3x^2y\hat{e}_z$

2.3) $\vec{A}=r^2\hat{e}_r+\cos\theta\,\hat{e}_\theta$ 2.4) $\vec{A}=r^2z\hat{e}_r-r\hat{e}_\theta+z\cos\theta\,\hat{e}_z$

2.5) $\vec{A}=\rho\hat{e}_\phi$ 2.6) $\vec{A}=\rho\sin\phi\hat{e}_\rho+\rho\sin\phi\cos\theta\,\hat{e}_\theta-\rho\cos\phi\hat{e}_\phi$

2.8.5 เอกลักษณ์ของ $\vec{\nabla}$ $\vec{\nabla}f$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ และ $\vec{\nabla}\times\vec{A}$

เอกลักษณ์การบวกและลบ

$$\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla}f \pm \vec{\nabla}g \qquad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \pm \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A} \pm \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

เอกลักษณ์การคูณ

$$\vec{\nabla}(fg) = \left(\vec{\nabla}f\right)g + f\vec{\nabla}\cdot g \qquad \vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{A} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{A} + f\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \qquad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - \vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) + \vec{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

เอกลักษณ์ของเกรเดียนท์ ไดเวอร์เจนต์ และเคิร์ล

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right) = \nabla^2 f \qquad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$$

ตัวอย่างที่ 2.20 จงพิสูจน์ว่า $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$

วิธีทำ กำหนดให้ $f = f(x,y,z)$ และ $g = g(x,y,z)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(f+g) &= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(f+g) \\
&= \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(f+g) + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(f+g) + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(f+g) \\
&= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}f + \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}g\right) + \left(\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}f + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}g\right) + \\
&= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}f + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}f + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}f\right) + \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}g + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}g + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}g\right) \\
&= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)g \\
&= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$

2.8.6 ลาปลาเซียน

ลาปลาเซียน (Laplacian, ∇^2) อนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งลาปลาเซียนในระบบพิกัดต่างๆ

ลาปลาเซียนในระบบพิกัดฉาก $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ลาปลาเซียนในระบบพิกัดทรงกระบอก $$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ลาปลาเซียนในระบบพิกัดทรงกลม

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.21 จงพิสูจน์ว่า $\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla} = \nabla^2$

วิธีทำ จาก $\vec{\nabla} = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$ และ $f = f(x,y,z)$ เป็นสเกลาร์ในระบบพิกัดฉาก

จะได้ $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)$ และ

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla} f(x,y,z) &= \left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(x,y,z) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z) \\
&= \nabla^2 f(x,y,z)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla} = \nabla^2$

แบบฝึกหัดที่ 2.6

1) จงพิสูจน์ว่า $\vec{\nabla}\bullet\left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\bullet\vec{A} + f\vec{\nabla}\bullet\vec{A}$

เมื่อ $f = f(x,y,z)$ และ $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z) = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z$

2) จงพิสูจน์ว่า $\vec{\nabla}\bullet\left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\bullet\vec{A} + f\vec{\nabla}\bullet\vec{A}$

เมื่อ $f = x^2yz$ และ $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z) = 2xyz^2\hat{e}_x - y^2z\hat{e}_y + xy^2z\hat{e}_z$

3) จงพิสูจน์ว่า $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$ และ $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1) จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1) $f(x)=(x+1)^3(x-1)^2$ 1.2) $f(x)=(x-1)^3$

1.3) $f(x)=e^{3x}\cos(2x)$ 1.4) $f(t)=(t^2+2t-1)^{\frac{5}{2}}$

2) จงหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ และ $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1) $f(x,y)=e^{x^2y}\cos(xy)$! !

2.2) $f(x,y)=e^{-xy}\left[\cos(y)+\sin(y)\right]$

3) จงหาจุดวิกฤต ค่าต่ำสุด ค่าสูงสุดของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1) $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+5$ 3.2) $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x+3$

3.3) $f(x)=5\sin(x)$ 3.4) $f(x)=10e^{-2x}$

4) จงหาเกรเดียนท์ของฟังก์ชันสเกลาร์ต่อไปนี้

4.1) $f(x,y,z)=zx^2-xy^2z+2xz^3$ 4.2) $f(r,\theta,z)=r\sin\theta+rz\cos\theta$

4.3) $f(\rho,\theta,\phi)=\rho\cos\phi$

5) จงหาไดเวอร์เจนต์และเคิร์ลของเวกเตอร์ต่อไปนี้

5.1) $\overline{A}=x^2y\hat{e}_x+xy^2\hat{e}_y+xyz\hat{e}_z$ 5.2) $\overline{A}=r^2\hat{e}_r+r\sin\theta\,\hat{e}_\theta+r\cos\theta\,\hat{e}_z$

5.3) $\overline{A}=\rho\sin\phi\cos\theta\,\hat{e}_\rho+\rho\sin\phi\sin\theta\,\hat{e}_\theta$

6) กำหนดให้ $\overline{E}=-\overline{\nabla}V$ เมื่อ $V=ax+by^2$ a,b เป็นค่าคงที่ใดๆ และ $\overline{\nabla}\bullet\overline{E}=0$ จงพิสูจน์ ลาปลาซ $\nabla^2V=0$

7) กำหนดให้ $\overline{\nabla}\bullet\overline{E}=0,$ $\overline{\nabla}\bullet\overline{H}=0,$ $\overline{\nabla}\times\overline{E}=-\mu_0\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}$ และ $\overline{\nabla}\times\overline{H}=-\varepsilon_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$

เมื่อ μ_0,ε_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ และ $c^2=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ จงแสดงว่า

7.1) $\nabla^2\overline{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}$ 7.2) $\nabla^2\overline{H}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2}$