บทที่ 3

การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอุปกรณ์ หมายถึงการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อแทนลักษณะการปฏิบัติงานของอุปกรณ์ รวมทั้งพฤติกรรมของกระบวนการทำงาน และสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ของสารต่างๆ มีเหตุผลและความจำเป็นมากมายในการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางวิศวกรรม แต่ที่สำคัญคือ เพื่อนำไปช่วยในการออกแบบอุปกรณ์ภายในระบบ โดยการนำแบบจำลองนี้ไปจำลองสถานการณ์การทำงานของระบบเพื่อให้ทราบ ขนาด ความสามารถของอุปกรณ์ต่างๆ ในระบบ เป็นต้น หรือจำลองสถานการณ์การทำงานเพื่อหาเงื่อนไขการทำงานแบบเหมาะที่สุด ในบทนี้จะได้เรียนรู้การพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอุปกรณ์ในระบบพลังงาน ซึ่งแบบจำลองนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 หมวด คือ แบบจำลองที่พัฒนามาจากข้อมูลการทดลอง และแบบจำลองที่พัฒนามาจากกฎเกณฑ์ทางทฤษฎี

3.1 แบบจำลองที่พัฒนามาจากข้อมูลการทดลอง

การพัฒนาแบบจำลองจากข้อมูลการทดลองเพื่อนำไปใช้นั้นมีความจำเป็นอย่างมากเพราะโดยทั่วไปแล้วการจำลองสถานการณ์การทำงานของระบบต้องใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณ ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลการทดลองจะสะดวกต่อการนำไปใช้มากกว่าการใช้ข้อมูลการทดลองที่อยู่ในรูปแบบตาราง

ปกติแล้วระบบทุกระบบจะสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มาจากทางทฤษฎีได้ แต่บางครั้งระบบที่มีความซับซ้อนนี้ จะมีความยุ่งยากในการสร้างแบบจำลองจากการใช้ทฤษฎี ดังนั้นการสร้างแบบจำลองจากข้อมูลการทดลองจึงมีความจำเป็นเพราะสร้างแบบจำลองได้ง่ายกว่า ยกตัวอย่างระบบปั๊มความร้อน ซึ่งมีส่วนประกอบอุปกรณ์หลายอย่าง เช่น เครื่องอัดไอ เครื่องควบแน่น เป็นต้น กรณีเครื่องอัดไออาจมีความซับซ้อน จึงอาจใช้วิธีสร้างแบบจำลองจากข้อมูลการทดลองเพื่อหาสมรรถนะหรือสมบัติต่างๆ ของสารทำงานขณะเครื่องอัดไอทำงาน โดยเก็บข้อมูลจากการทดลองแล้วนำมาสร้างสมการหาความสัมพันธ์ตามต้องการ ซึ่งข้อดีของแบบจำลองที่สร้างมาจากข้อมูลการทดลองนี้คือมีความถูกต้องแม่นยำในช่วงของเงื่อนไขการทดลอง แต่จะไม่สามารถนำไปใช้ในสถานการณ์อื่นๆ ที่ไม่อยู่ภายใต้เงื่อนไขการทดลองได้ สำหรับเครื่องควบแน่นซึ่งเป็นเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนชนิดหนึ่งซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่ไม่ซับซ้อนมากนัก ดังนั้นจึงสามารถสร้างแบบจำลองจากทฤษฎีได้สะดวกและสามารถใช้งานได้ดีกว่าการสร้างจากข้อมูลการทดลอง

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลการทดลองนี้ เป็นการหาค่าคงตัว หรือค่าสัมประสิทธิ์ในสมการรูปแบบต่างๆ โดยการฟิตข้อมูลลงในสมการที่เหมาะสม การศึกษาในหัวข้อนี้มีความจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานการแก้ระบบสมการเชิงเส้นก่อน

3.1.1 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามารถหาได้หลายวิธี สำหรับตำรานี้จะใช้วิธีกฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) และวิธีการกำจัดของเกาส์เซียน (Gaussian elimination) ซึ่งทั้งสองวิธีนี้สะดวกที่ใช้คอมพิวเตอร์ในการแก้ระบบสมการได้

3.1.1.1 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีกฎของคราเมอร์

ระบบสมการเชิงเส้นสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมการได้ดังสมการที่ (3.1)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

สมการที่ (3.1) เป็นระบบสมการเชิงเส้นโดยมีค่า x_1 , x_2 และ x_3 เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า a_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และ b_1 เป็นค่าคงตัว เรานิยมเขียนระบบสมการเชิงเส้นนี้ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (3.2)

$$AX = B \tag{3.2}$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ครามเมอร์กล่าวไว้ว่า ค่า x_i มีค่าเท่ากับ determinant ของเมทริกซ์ A ที่ถูกแทนด้วยเมทริกซ์ B ในคอลัมน์ที่ i หารด้วย determinant ของเมทริกซ์ A สามารถเขียนได้ตามสมการ (3.3), (3.4), (3.5)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{3.3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{3.4}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{3.5}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาคำตอบของระบบสมการข้างล่างนี้ โดยใช้วิธีกฎของคราเมอร์

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 9 \\
-x_1 \qquad + 3x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-45}{-15} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30}{-15} = -2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-15} = 1$$

ตอบ $x_1 = 3, x_2, = -2, x_3 = 1$

3.1.1.2 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการกำจัดของเกาส์เซียน

หลักการแก้ปัญหาโจทย์ของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการกำจัดของเกาส์เซียน มีอยู่ 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนที่หนึ่ง เปลี่ยนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix) จากนั้นขั้นตอนที่สอง หาคำตอบของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าโดยการแทนย้อนกลับจาก x_n จนถึง x_1

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการกำจัดของเกาส์เซียน

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \qquad (3.6)$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \qquad (3.7)$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \qquad (3.8)$$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1

กำจัด x_1 ของสมการที่ (3.7) โดยการนำสมการที่ (3.7) บวกด้วยสามเท่าของสมการที่ (3.6) จะได้สมการที่ (3.10) และ กำจัด x_1 ของสมการที่ (3.8) โดยการนำสมการที่ (3.8) ลบด้วยสมการที่ (3.6) จะได้สมการที่ (3.11)

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \qquad (3.9)$$

$$2x_2 + 7x_3 = 2 \qquad (3.10)$$

$$2x_1 + 2x_2 = 2 \qquad (3.11)$$

จากนั้น กำจัด x_2 ของสมการที่ (3.11) โดยการนำสมการที่ (3.11) ลบด้วยสมการที่ (3.10) จะได้สมการที่ (3.14)

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \qquad (3.12)$$

$$2x_2 + 7x_3 = 12 \qquad (3.13)$$

$$-5x_3 = -10 \qquad (3.14)$$

ขั้นตอนที่ 2

จากสมการที่ (3.14) สามารถหาคำตอบได้โดยการแก้สมการที่ (3.14) จะได้ $x_3 = 2$
นำค่า $x_3 = 2$ แทนย้อนกลับลงในสมการที่ (3.13) แล้วแก้สมการ จะได้ $x_2 = -1$
นำค่า $x_3 = 2$ และ $x_2 = -1$ แทนย้อนกลับลงในสมการที่ (3.12) แล้วแก้สมการจะได้ $x_1 = 1$

ตอบ $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$