บทที่ 5
ปริพันธ์ (Integral)

วิชาแคลคูลัสแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ คือส่วนที่เรียกว่า แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (differential calculus) และแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ (integral calculus) เราได้ศึกษาส่วนที่เรียกว่าแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์มาแล้วในบทที่ 3 และ 4 ต่อไปนี้จะกล่าวถึงแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ ซึ่งก็คือ การหาปริพันธ์

การหาปริพันธ์ถือได้ว่าเป็นบทกลับของอนุพันธ์ กล่าวคือ ในเรื่องการหาอนุพันธ์เมื่อกำหนดฟังก์ชันมาให้ เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ส่วนการปริพันธ์เป็นการกำหนดค่าอนุพันธ์มาให้ แล้วหาฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ตามที่กำหนดให้ และด้วยวิธีการของการหาปริพันธ์ ทำให้เราสามารถหาฟังก์ชันระยะทาง ความยาวของเส้นโค้ง ปริมาตร และอื่นๆ ได้อีกมาก ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการหาฟังก์ชันพื้นที่ และการประยุกต์ของการหาปริพันธ์บางแบบเท่านั้น

การหาปริพันธ์มี 2 ชนิด คือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และปริพันธ์จำกัดเขต กล่าวโดยย่อ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต คือ วิธีการหาฟังก์ชันเมื่อกำหนดค่าอนุพันธ์มาให้ ส่วนปริพันธ์จำกัดเขต คือ วิธีหาผลรวมหรือสิ่งที่เกี่ยวข้องทั้งหมด

5.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivatives)

จากการหาอนุพันธ์ สิ่งที่กำหนดให้ คือ $y = f(x)$ แล้วหา $\frac{dy}{dx}$ จึงเกิดปัญหาว่า เมื่อกำหนดอนุพันธ์ของ y (หรือ $\frac{dy}{dx}$) จะหาฟังก์ชัน $y = f(x)$ ได้อย่างไร ซึ่งกระบวนย้อนกลับของการอนุพันธ์ก็คือส่วนของการหาปริพันธ์นั้นเอง นั่นคือ สิ่งกำหนดให้จะเป็น $\frac{dy}{dx}$ แล้วให้หา y ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

กำหนดให้ $y = \frac{x^3}{3} = F(x)$ จะได้อนุพันธ์ของ y คือ $\frac{dy}{dx} = x^2 = f(x)$

กำหนดให้ $y = \frac{x^3}{3} + 2 = F(x)$ จะได้อนุพันธ์ของ y คือ $\frac{dy}{dx} = x^2 = f(x)$

กำหนดให้ $y = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} = F(x)$ จะได้อนุพันธ์ของ y คือ $\frac{dy}{dx} = x^2 = f(x)$

กำหนดให้ $y = \frac{x^3}{3} + \pi = F(x)$ จะได้อนุพันธ์ของ y คือ $\frac{dy}{dx} = x^2 = f(x)$

ดังนั้น สรุปได้ว่าถ้า $\frac{dy}{dx} = x^2$ แล้วเราจะได้ $y = \frac{x^3}{3} + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

โดยทั่วไปเมื่อกำหนด $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ขบวนการซึ่งทำให้ได้ $y = F(x) + C$ เราเรียกว่า **การหาปริพันธ์ (integration)** และเรียก $y = F(x) + C$ ว่าเป็น **ผลเฉลย (solution)** หรือ **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)**

บทนิยาม 5.1 ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว เราจะกล่าวว่า $F(x)$ เป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของ $f(x)$

จากตัวอย่างข้างต้นเราจะเห็นแล้วว่า ทุกฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน x^2 ดังนั้นเราจะเห็นว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน x^2 มีหลายฟังก์ชันแต่ทุกฟังก์ชันอยู่ในรูป $\frac{x^3}{3} + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 5.1 จงหาปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ $6x^2 - 8x - 3$

ตัวอย่าง 5.2 จงหาปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ $9x^2 - 4x$

5.2 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

จากที่ได้กล่าวมาแล้วถึงกระบวนการหาปฏิยานุพันธ์ เราสามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า เป็น**การหาปริพันธ์** นั้นคือ ถ้า $F'(x) = f(x)$ จะได้ $F(x) + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ซึ่งเราจะเขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ และมีชื่อเรียกตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.2 ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว เราจะกล่าวว่า $F(x) + C$ ว่าเป็น **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral)** ของ f และเขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ นั่นคือ

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

สัญลักษณ์	$\int$	เรียกว่า	เครื่องหมายอินทิกรัล
	$f(x)$	เรียกว่า	ปริพัทธ์ (integrand) : ตัวถูกหาปริพันธ์
	x	เรียกว่า	ตัวแปรของการหาปริพันธ์
	C	เรียกว่า	ค่าคงที่ของการหาปริพันธ์

$\int f(x)dx$ อ่านว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (หรือการอินทิเกรตไม่จำกัดเขต) ของ** f **เทียบ** x

เนื่องจากการหาปริพันธ์เป็นกระบวนการที่ตรงข้างกับการอนุพันธ์ ดังนั้น เมื่อเราต้องการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน นั้นหมายถึง เป็นการหาว่าฟังก์ชันนั้นเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชันใด ซึ่งเราสามารถทำได้อย่างรวดเร็ว โดยการใช้สูตรสำหรับการหาปริพันธ์ที่จะกล่าวต่อไปนี้ ซึ่งจะช่วยให้การหาปริพันธ์ง่ายขึ้น และในที่นี้เราจะขอละการพิสูจน์ไว้ เพื่อให้นักศึกษาไปศึกษาดูด้วยตนเอง สำหรับผู้ที่สนใจ

สูตรพื้นฐานสำหรับการหาปริพันธ์

ให้ u,v และ w เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง (ในที่นี่สมมติว่าเป็น x) a,n และ c เป็นค่าคงที่

1. $\int 0du = 0$
2. $\int adu = a\int du$
3. $\int dx = x+c$
4. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c, \quad (n\neq -1)$
5. $\int (du+dv-dw) = \int du+\int dv-\int dw$
6. $\int \dfrac{1}{u}du = \ln|u|+c$
7. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a}+c$
8. $\int e^u du = e^u+c$
9. $\int \sin udu = -\cos u+c$
10. $\int \cos udu = \sin u+c$
11. $\int \sec^2 udu = \tan u+c$
12. $\int \mathrm{cosec}^2 udu = -\cot u+c$
13. $\int \sec u\tan udu = \sec u+c$
14. $\int \mathrm{cosec}u\cot udu = -\mathrm{cosec}u+c$
15. $\int \tan udu = \ln|\sec u|+c$
16. $\int \cot udu = \ln|\sin u|+c$
17. $\int \sec udu = \ln|\sec u+\tan u|+c$
18. $\int \mathrm{cosec}udu = \ln|\mathrm{cosec}u-\cot u|+c$
19. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a}+c$
20. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+c$
21. $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right|+c$

$$22.\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad = \sin^{-1}\frac{u}{a}+c$$

$$23.\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} \qquad = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$$

$$24.\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} \qquad = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$$

$$25.\int \sqrt{a^2-u^2}\,du \qquad = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+c$$

$$26.\int \sqrt{u^2+a^2}\,du \qquad = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$$

$$27.\int \sqrt{u^2-a^2}\,du \qquad = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$$

$$28.\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} \qquad = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+c$$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int 8dx$ 2. $\int x^{11}dx$

3. $\int \frac{2}{-x^2}dx$ 4. $\int \frac{e^x}{4}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.4 จงหา $\int (3x^4 - 5\sqrt{x} + \sin x - 9)dx$

ตัวอย่าง 5.5 จงหา $\int (5e^x - x + \frac{3x^2}{2} - 7^x)dx$

ตัวอย่าง 5.6 จงหา $\int (\frac{3}{x^4} - \frac{1}{3x} + \sec^2 x)dx$

ตัวอย่าง 5.7 จงหา $\int x^2\sqrt{x}dx$

ตัวอย่าง 5.8 จงหา $\int (2-3x^2)^2\,dx$

ตัวอย่าง 5.9 จงหา $\int (\frac{1-2t^5}{t^6})dx$

ตัวอย่าง 5.10 จงหา $\int \frac{dx}{9-x^2}$

ตัวอย่าง 5.11 จงหา $\int \sec\theta(\sec\theta+1)d\theta$

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ บางครั้งไม่สามารถใช้สูตรได้โดยตรง ต้องจัดรูปโดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติก่อน เช่น

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A,\quad \frac{1}{\cos A} = \sec A,\quad \frac{1}{\tan A} = \cot A,\quad \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

ตัวอย่าง 5.12 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \frac{\cos\theta - 3}{\sin^2\theta}\, d\theta$
2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\, dx$
3. $\int \sec x \sin 2x\, dx$
4. $\int \sqrt{1+\cos 2t}\, dt$
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$
6. $\int \frac{dt}{1-\sin t}$
7. $\int \frac{dx}{1+\sec x}$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 5.1 - 5.2

จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int (1+\cos x)dx$
2. $\int (x^{-3}+\frac{5}{\sqrt{x}})dx$
3. $\int (3x^2-2x+7)dx$
4. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$
5. $\int (\sqrt{x}+1)dx$
6. $\int (\frac{2x-5}{x})dx$
7. $\int (5x^4+8x-5)dx$
8. $\int (x+\frac{5}{x})^2 dx$
9. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$
10. $\int 2x(1+x^2)dx$
11. $\int e^x+4^x dx$
12. $\int (\tan x-x^e+e^x)dx$
13. $\int (x^{-3}+\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{4}})dx$
14. $\int (\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+10\sqrt[3]{x^2})dx$
15. $\int (7y^3+1)(\sqrt{y}-3)dy$
16. $\int (2-y^3)^2 dy$
17. $\int (\frac{1}{t^2}+\sin t)dt$
18. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$
19. $\int \frac{1-te^t}{t}dt$
20. $\int (t+\frac{1}{\sin t})dt$

5.3 เทคนิคการปริพันธ์

จากหัวข้อที่แล้วเราสามารถหาปริพันธ์ของ $\int f(x)dx$ ได้โดยง่าย ถ้า $f(x)$ มีรูปแบบตรงกับสูตรของการหาปริพันธ์ เช่น $\int x^5dx, \int \sqrt{t}dt, \int \frac{1}{s}ds, \int \tan\theta d\theta$ และ $\int e^y dy$ ซึ่งเราสามารถใช้สูตรการหาปริพันธ์ได้ทันที แต่ถ้า $f(x)$ มีความซับซ้อนมากจนไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานมาหาปริพันธ์ได้ เช่นการหา $\int (x^2+1)^5dx,\ \int 3t^2\sqrt[3]{t^3+2}dt, \int \frac{2s^3+1}{s^4+2t}ds, \int \sin(\ln\theta+\theta)d\theta$ และ $\int (5y^2-1)^{e^{y^2-y+3}}dy$ เป็นต้น การหาปริพันธ์ดังกล่าวเราต้องมีการจัดรูปหรือเปลี่ยนตัวแปรเพื่อให้ใช้สูตรได้ จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคต่างๆมาช่วย ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะแนะนำ 4 วิธีด้วยกัน คือ

1. การหาปริพันธ์โดยแทนค่า (Integration by substitution)
2. การหาปริพันธ์โดยแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration by trigonometric substitution)
3. การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integration by part)
4. การหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย (Integration by partial fraction)

ดังต่อไปนี้

5.3.1 การหาปริพันธ์โดยแทนค่า

ในการหา $\int f(x)dx$ เราจะเลือกตัวแปรตัวใหม่ ในที่นี้จะใช้ตัวแปร u โดยที่ u เป็นฟังก์ชันของ x ทำให้ $\int f(x)dx$ กลายเป็น $\int g(u)du$ และ $\int g(u)du$ ตรงกับสูตรพื้นฐานที่มีอยู่ จึงสามารถหาปริพันธ์ได้โดยใช้สูตรดังกล่าว

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.13 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int 2x(1+x^2)^{99}dx$
2. $\int x^3(2x^4+5)^7dx$
3. $\int \frac{x+\sin 2x}{\sqrt{x^2-\cos 2x+5}}dx$
4. $\int \sin 2x\ \sqrt[3]{3+\cos^2 x}\ dx$
5. $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

วิธีทำ

ข้อสังเกต จะเห็นว่าจากตัวอย่างที่ 5.13 เป็นการหาปริพันธ์โดยวิธีแทนค่าตัวแปรด้วยสูตร___________

ตัวอย่าง 5.14 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$
2. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$
3. $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$
4. $\int \frac{e^{2t}}{e^{2t}+4}dt$

วิธีทำ

ข้อสังเกต จะเห็นว่าจากตัวอย่างที่ 5.14 เป็นการหาปริพันธ์โดยวิธีแทนค่าตัวแปรด้วยสูตร____________

ตัวอย่าง 5.15 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int 5^{3x}\,dx$
2. $\int \frac{1}{3^{2x}}\,dx$
3. $\int (3x^2-1)e^{x^3-x+7}\,dx$
4. $\int (1+\ln x)e^{x\ln x}\,dx$

วิธีทำ

ข้อสังเกต จะเห็นว่าจากตัวอย่างที่ 5.15 เป็นการหาปริพันธ์โดยวิธีแทนค่าตัวแปรด้วยสูตร____________

ตัวอย่าง 5.16 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \sin(3x+4)dx$
2. $\int x\tan x^2 dx$
3. $\int xe^{x^2}\sec\left(\frac{e^{x^2}}{6}\right)dx$
4. $\int (1-\frac{1}{x})\text{cosec}(x-\ln x)dx$

วิธีทำ

ข้อสังเกต จะเห็นว่าจากตัวอย่างที่ 5.16 เป็นการหาปริพันธ์โดยวิธีแทนค่าตัวแปรด้วยสูตร____________

แบบฝึกหัด 5.3.1

จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int (2x-1)^5 dx$
2. $\int 2x \cdot \cos(x^2) dx$
3. $\int x \cdot e^{2x^2+1} dx$
4. $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$
5. $\int x^2 \cdot \sin(x^3) dx$
6. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
7. $\int x^2 \cdot (x^3-1)^4 dx$
8. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$
9. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$
10. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
11. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 2x} dx$
13. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$
14. $\int x \cdot 2^{-x^2} dx$
15. $\int (x^2-3)\sqrt{x^3-9x} dx$
16. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{1-x}} dx$
17. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$
18. $\int 4xe^{x^2-1} dx$
19. $\int x^3 \sec(\pi + x^4) dx$
20. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
21. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$
22. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}} dx$
23. $\int 3^x (3^x-1)^8 dx$
24. $\int x \sin(\pi x^2) dx$

5.3.2 การหาปริพันธ์โดยแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ถ้าฟังก์ชันที่เราต้องการหาปริพันธ์มีพจน์ $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ และ $x^2 - a^2$ เกี่ยวข้องอยู่ด้วย เราจะใช้วิธีแทนตัวแปร x ด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหมาะสม และอาศัยเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

$$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$$

เพื่อทำให้ได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบตรงตามสูตรของการหาปริพันธ์

ก. ถ้า $f(x)$ *มีพจน์* $a^2 - x^2$ *เกี่ยวข้อง เช่น* $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ *เมื่อ* $a > 0$

เราจะให้ $x = a\sin\theta$ *เมื่อ* $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ซึ่งทำให้ $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$ *และ* $dx = a\cos\theta d\theta$

ตัวอย่าง 5.17 จงหา $\int \sqrt{25 - x^2}\,dx$

วิธีทำ

ข. ถ้า $f(x)$ *มีพจน์* $a^2 + x^2$ *เกี่ยวข้อง เช่น* $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$ *เมื่อ* $a > 0$

เราจะให้ $x = a\tan\theta$ *เมื่อ* $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ซึ่งทำให้ $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$ *และ* $dx = a\sec^2\theta d\theta$

ตัวอย่าง 5.18 จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

วิธีทำ

ค. ถ้า $f(x)$ *มีพจน์* $x^2 - a^2$ *เกี่ยวข้อง เช่น* $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ *เมื่อ* $a > 0$

เราจะให้ $x = a\sec\theta$ *เมื่อ* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ *หรือ* $[\pi, \frac{3\pi}{2})$

ซึ่งทำให้ $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$ *และ* $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$

ตัวอย่าง 5.19 จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.20 จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 5.3.2

จงหาปริพันธ์โดยการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหมาะสม

1. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

2. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}dx$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$

6. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx$

8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

10. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}dx$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}dy$

12. $\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

13. $\int \frac{8}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

15. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$

16. $\int \frac{e^t}{\left(1+e^{2t}\right)^{\frac{3}{2}}}dt$

17. $\int \frac{dx}{1+x^2}$

18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$

19. $\int \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

20. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

21. $\int \frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

22. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+9}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$

24. $\int \frac{dy}{y^2+10y+30}$

25. $\int \frac{bdx}{a^2x^2-c^2}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

5.3.3 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

ในบางกรณี การหาปริพันธ์ของบางฟังก์ชันอาจไม่อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้สูตรได้โดยตรง และไม่สามารถเปลี่ยนตัวแปรใหม่ดังวิธีที่ได้กล่าวมาแล้วได้ จึงมีวิธีการหาปริพันธ์อีกแบบที่เรียกว่า **การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน** ซึ่งเป็นการหาปริพันธ์โดยเขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูปของ $\int udv$ โดยที่ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ได้ แล้วจึงหา $\int udv$ โดยอาศัยสูตรดังจะกล่าวต่อไปนี้

จาก $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ทำให้ได้ค่าเชิงอนุพันธ์ของผลคูณ

$$d(uv) = udv + vdu$$

ดังนั้น $$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

เราเรียกสูตรนี้ว่า “**สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน**”

ตัวอย่าง 5.21 จงหาปริพันธ์ $\int x\cos xdx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.22 จงหาปริพันธ์ $\int xe^x dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.23 จงหาปริพันธ์ $\int x^2 \ln x dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.24 จงหาปริพันธ์ $\int (3x+1)\sin(2x)\ dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.25 จงหาปริพันธ์ $\int x^3 \cos(x^2)\ dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.26 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.27 จงหาปริพันธ์ $\int \sin^{-1} x dx$

วิธีทำ

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยการแยกส่วน บางครั้งเราอาจต้องทำมากกว่าหนึ่งครั้ง เช่น

ตัวอย่าง 5.28 จงหาปริพันธ์ $\int x^2 e^{-x} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.29 จงหาปริพันธ์ $\int \sin(\ln x) dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.30 จงหาปริพันธ์ $\int e^x \sin x dx$

วิธีทำ

ข้อสังเกต จากสมการ (*) ถ้าเราหา $\int e^x \cos x dx$ โดยให้

$$u = \cos x \quad \text{และ} \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin x dx \quad \text{และ} \quad v = e^x$$

เพราะฉะนั้น จะได้ $\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าใน (*) จะทำให้ไม่มี $\int e^x \sin x dx$ ซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องการหาปริพันธ์ที่เหลืออยู่เลย

ดังนั้น ถ้าในการหาปริพันธ์ครั้งแรกให้ $u = e^x$ การหาปริพันธ์ครั้งต่อไปก็ควรให้ $u = e^x$ ด้วย หรือถ้าในการหาปริพันธ์ครั้งแรกเราให้ $u = \sin x$ การหาปริพันธ์ครั้งต่อไปก็ให้ $u = \cos x$

เพื่อให้การหา $\int f(x)g(x)dx$ โดยใช้การหาปริพันธ์โดยแยกส่วนหลายๆ ครั้งเป็นไปได้ง่าย จึงมีวิธีที่สะดวกกว่าซึ่งเรียกว่าการหาปริพันธ์โดยจัดเป็นตาราง (tabular integration) ซึ่งจะแสดงด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.31 จงหาปริพันธ์ $\int x^2 e^{-x} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.32 จงหาปริพันธ์ $\int x^3 \sin x dx$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 5.3.3

จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int x\sin x dx$
2. $\int \ln x dx$
3. $\int \tan^{-1} x dx$
4. $\int xe^{x} dx$
5. $\int x^2 e^x dx$
6. $\int \sin x\cos x dx$
7. $\int x^3 e^{-2x} dx$
8. $\int (x-2)^3 e^{-2x} dx$
9. $\int x(\ln x)^2 dx$
10. $\int x\cos 3x dx$
11. $\int 10x\sin 5x\, dx$
12. $\int \sec^3 x dx$
13. $\int x^2 2^x dx$
14. $\int \sqrt{x}\ln x dx$
15. $\int x\ln(1+x^2) dx$
16. $\int \ln x^2 dx$
17. $\int x^2 e^{-3x} dx$
18. $\int \frac{\ln x dx}{(x+2)^2}$
19. $\int 3x^2\sqrt{x^2+1} dx$
20. $\int \sin^{-1}(2x) dx$
21. $\int (x-3)^2 \sin x\, dx$
22. $\int \ln(x^2+3) dx$

5.3.4 การหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่เราต้องการหาปริพันธ์เป็น**ฟังก์ชันตรรกยะ** กล่าวคือ

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

โดยที่ $P_n(x)$ และ $Q_m(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดคือ n และ m ตามลำดับ

ถ้า $n < m$ แล้ว $f(x)$ เป็น**เศษส่วนตรรกยะแท้**

ถ้า $n \geq m$ แล้ว $f(x)$ เป็น**เศษส่วนตรรกยะไม่แท้**

ถ้า $f(x)$ เป็นเศษส่วนตรรกยะไม่แท้ แล้วเราสามารถเขียน $f(x)$ ในรูปผลบวกของฟังก์ชันพหุนามกับเศษส่วนตรรกยะแท้ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.33 จงเขียนเศษส่วนตรรกยะไม่แท้ต่อไปนี้เป็นผลบวกของพหุนามกับเศษส่วนตรรกยะแท้

ก. $\dfrac{x^5 - 2x^3 - x + 1}{x^3 - 4x}$ ข. $\dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$

วิธีทำ ก. เป็นเศษส่วนตรรกยะไม่แท้ ซึ่งเราจะหารยาว $x^5 - 2x^3 - x + 1$ ด้วย $x^3 - 4x$ จะได้ว่า

$$x^5 - 2x^3 - x + 1 = (x^2 + 2)(x^3 - 4x) + (7x + 1)$$

ดังนั้น

$$\frac{x^5 - 2x^3 - x + 1}{x^3 - 4x} = (x^2 + 2) + \frac{(7x+1)}{x^3 - 4x}$$

ข.

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 3}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$= 1 + \frac{3}{x^2 + 1}$$

❒

โดยทั่วไป ถ้า $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นเศษส่วนตรรกยะแท้แล้ว เราสามารถเขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนประเภท $\dfrac{A}{(ax+b)^p}$ หรือ $\dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^p}$ ได้เสมอ เมื่อ p เป็นจำนวนนับ และ a, b, c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ และ $ax^2 + bx + c$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเชิงเส้นได้ เช่น $\dfrac{5}{(x+4)^2}$ หรือ $\dfrac{2x+5}{x^2 + 2x + 5}$ เป็นต้น

ซึ่งเราจะเรียก เศษส่วนประเภท $\dfrac{A}{(ax+b)^p}$ และ $\dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^p}$ ว่า **เศษส่วนย่อย**

การแยกเศษส่วนย่อยจะขึ้นอยู่กับตัวประกอบของ $Q(x)$ ซึ่งมีหลักเกณฑ์ดังนี้

ก. ถ้า $Q(x)$ แยกตัวประกอบได้ทั้งหมดและไม่ซ้ำกัน เราจะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{x+a}{(x+b)(x+c)(x+d)}=\frac{A}{(x+b)}+\frac{B}{(x+c)}+\frac{C}{(x+d)}$$

เช่น $\frac{7x-1}{(3x+1)(x-1)}=\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{x-1}$

ข. ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ ตัวหนึ่งอยู่ในรูป $(ax+b)^p$ เมื่อ $p\in I^+$ เราจะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{ax^2+b}{(x+c)^3}=\frac{A}{(x+c)}+\frac{B}{(x+c)^2}+\frac{C}{(x+c)^3}$$

เช่น $\frac{x^2+5x-1}{(x+2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}$

ค. ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ ตัวหนึ่งอยู่ในรูป ax^2+bx+c ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ และไม่ซ้ำกัน เราจะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{ax+b}{(cx^2+d)(x^2+ex+f)}=\frac{Ax+B}{(cx^2+d)}+\frac{Cx+D}{(x^2+ex+f)}$$

เช่น $\frac{3x^2+5x-1}{(3x^2+1)(x^2+5x-1)}=\frac{Ax+B}{3x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+5x-1}$

ง. ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ อยู่ในรูป $(ax^2+bx+c)^p$ โดยที่ ax^2+bx+c ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ และ $p\in I^+$ เราจะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)}+\frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)^2}$$

เช่น $\frac{2x^2+4x+1}{(x^2+2x+4)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+4)^2}$

เมื่อเขียนเศษส่วนตรรกยะแท้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้แล้ว ต่อไปจะเป็นการหาค่าคงตัว ซึ่งมีวิธีการหาได้ 3 วิธี เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.34 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 (เทียบสัมประสิทธิ์)

วิธีที่ 2 (กำหนดค่าตัวแปร x)

วิธีที่ 3 (ระเบียบวิธีของเฮวีไซด์)

ตัวอย่าง 5.35 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{6x^2+6x-6}{x^3+2x^2-x-2}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.36 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.37 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{5x-1}{x^2(2x-1)^2}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.38 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{x^4+x^3+3x^2-5x+4}{(x+3)(x^2+1)^2}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5.39 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}dx$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 5.4

จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \frac{2x+4}{1-x^2}dx$
2. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$
3. $\int \frac{4x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}dx$
4. $\frac{\int 2x^3+2x^2+4}{x^2(x^2+2)^2}dx$
5. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta-3\sin\theta+2}d\theta$
6. $\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx$
7. $\int \frac{1}{3x^2+4x-4}dx$
8. $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}dx$
9. $\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$
10. $\int \frac{dx}{1-x^2}$
11. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$
12. $\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}dx$
13. $\int \frac{ydy}{y^2-2y-3}$
14. $\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$
15. $\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$
16. $\int \frac{x+3}{2x^3-8x}dt$
17. $\int \frac{2x+1}{x^2+7x+12}dx$
18. $\int \frac{4}{x^2-1}dx$
19. $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx$
20. $\int \frac{2x^3+2x+1}{x^4+x^2}dx$
21. $\int \frac{2x^2+3}{x(x+1)(2x+3)}dx$
22. $\int \frac{x^2}{x^2-2x-1}dx$
23. $\int \frac{x^4+1}{x^3-1}dx$
24. $\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}dx$
25. $\int \frac{x^4-x^3+3x^2-10x+8}{x^3-x^2-4}dx$
26. $\int \frac{x^4-2x^3+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$